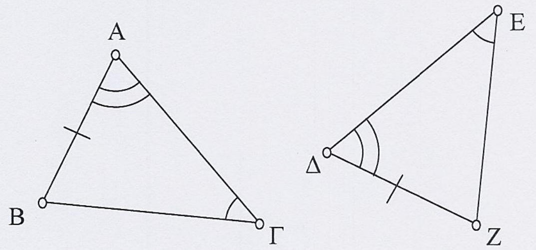
Μαριλένα Νικολαΐδου-Μουσουλίδου

ΙΣΟΤΗΤΑ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

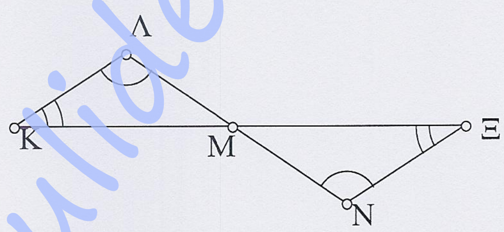
Ενδεικτικές Επαναληπτικές Δραστηριότητες 1

1. Από τα στοιχεία που δίνονται, να εξετάσετε κατά πόσο τα πιο κάτω ζεύγη τριγώνων είναι ΙΣΑ. Σε κάθε περίπτωση να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

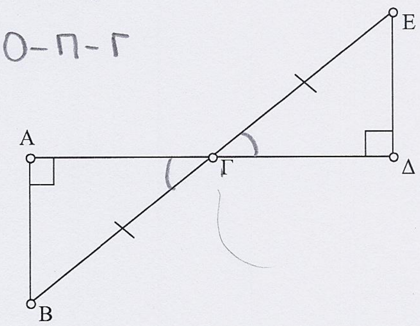
(α) ΙΣΑ Π-Γ-Γ



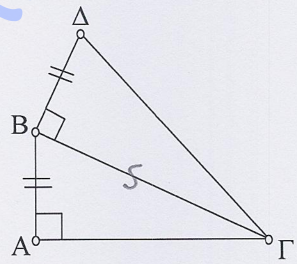
(β) Δεν είναι ΙΣΑ



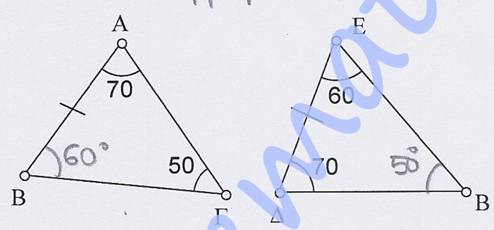
(γ) ΙΣΑ O-Π-Γ



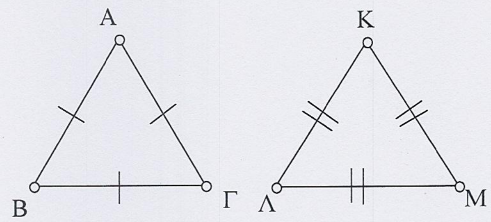
(δ) Δεν είναι ΙΣΑ



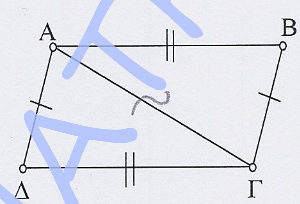
(ε) ΙΣΑ Π-Γ-Γ



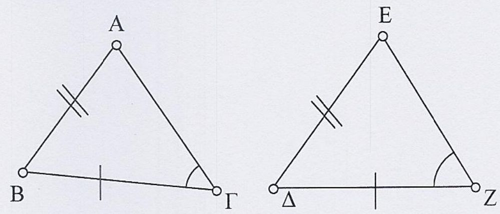
στ) Δεν είναι ΙΣΑ



(ζ) ΙΣΑ Π-Π-Π

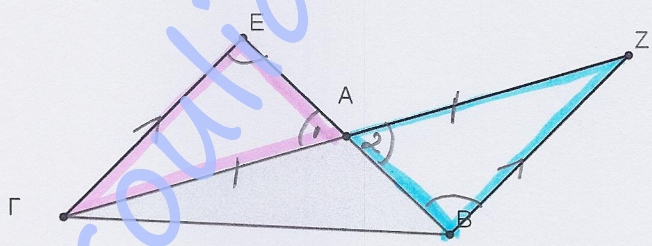


(η) Δεν είναι ΙΣΑ.



2. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμία από τις πιο κάτω προτάσεις:
   (α) Δύο τρίγωνα είναι ίσα αν έχουν δύο γωνίες και μια πλευρά αντίστοιχα ίσες. ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ
   (β) Δύο ορθογώνια με ίσες τις υποτείνουσές τους είναι ίσα. ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ
   (γ) Δύο τρίγωνα με ίσες περιμέτρους είναι ίσα. ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ
   (δ) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία είναι ίσα ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ

3. Στο διπλανό σχήμα $ΓΑ = ΑΖ$ και $ΓΕ \parallel ΒΖ$.
   Να δείξετε ότι $Α$ είναι το μέσο της $ΕΒ$.



Αποδειξη:

Συγκρίνουμε $\overset{\triangle}{ΑΕΓ} - \overset{\triangle}{ΑΒΖ}$:

① $\hat{Α}_1 = \hat{Α}_2$ (κατακορυφήν) Γ
② $\hat{Ε} = \hat{Β}$ (εντός εναλλάξ) Γ
③ $ΑΓ = ΑΖ$ (δεδομένο) Π

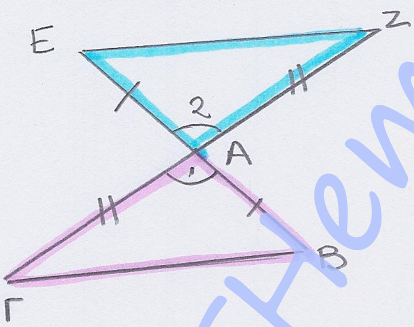
$\overset{\triangle}{ΑΕΓ} = \overset{\triangle}{ΑΒΖ}$
Π-Γ-Γ

Άρα, έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα.

Άρα, $ΕΑ = ΑΒ$

Άρα, $Α$ μέσο $ΕΒ$.

4. Σε τρίγωνο $ΑΒΓ$ προεκτείνουμε τις πλευρές $ΒΑ$ και $ΓΑ$, ώστε $ΑΕ = ΑΒ$ και $ΑΖ = ΑΓ$. Να δείξετε ότι $ΒΓ = ΖΕ$.



ΔΕΔ	ΖΗΤ
$ΑΕ = ΑΒ$ $ΑΖ = ΑΓ$	$ΒΓ = ΖΕ$

Συγκρίνουμε $\overset{\triangle}{ΑΒΓ} - \overset{\triangle}{ΑΕΖ}$:

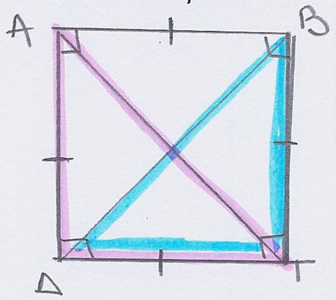
① $ΑΒ = ΑΕ$ (δεδ.) Π
② $ΑΓ = ΑΖ$ (δεδ.) Π
③ $\hat{Α}_1 = \hat{Α}_2$ (κατακορυφήν) Γ

$\overset{\triangle}{ΑΒΓ} = \overset{\triangle}{ΑΕΖ}$
Π-Γ-Π

Άρα, έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα.

Άρα, $ΒΓ = ΕΖ$

5. Να αποδείξετε ότι οι διαγώνιοι του τετραγώνου είναι ίσες.



Ορισμός τετραγώνου: $AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta A$

$\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 90^\circ$

Συγκρίνουμε $\overset{\triangle}{A\Delta\Gamma} - \overset{\triangle}{B\Delta\Gamma}$:

1. $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma} = 90^\circ$ (τετράγωνο) Ο
2. ΔΓ κοινή πλευρά Π
3. $A\Delta = B\Gamma$ (τετράγωνο) Π

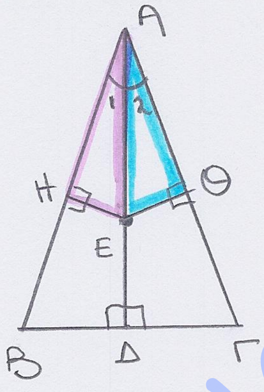
$\overset{\triangle}{A\Delta\Gamma} = \overset{\triangle}{B\Delta\Gamma}$

Π-Π-Ο

Άρα, έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα.

Άρα, $A\Gamma = B\Delta$

6. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma (AB = A\Gamma)$ φέρουμε το ύψος $A\Delta$. Από τυχαίο σημείο E του ύψους $A\Delta$, φέρουμε τις κάθετες EH και $E\Theta$ πάνω στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι $H\hat{E}A = \Theta\hat{E}A$.



Απόδειξη:

Συγκρίνουμε $\overset{\triangle}{AEH} - \overset{\triangle}{AE\Theta}$:

1. $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (ΑΔ ύψος, διάμεσος και διχοτόμος) Γ
2. $\hat{H} = \hat{\Theta} = 90^\circ$ (δεδομένο) Ο
3. ΑΕ κοινή πλευρά Π

$\overset{\triangle}{AEH} = \overset{\triangle}{AE\Theta}$

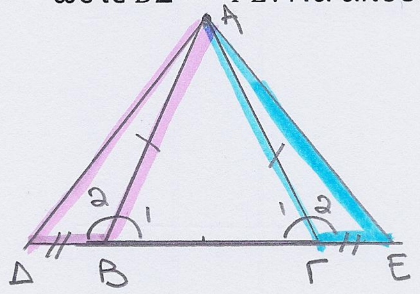
Π-Γ-Ο

Άρα, έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα.

Άρα, $A\hat{E}H = \Theta\hat{E}A$

ΔΕΔ	ΖΗΤ
$\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ ισοσκελές	$H\hat{E}A = \Theta\hat{E}A$
ΑΔ ύψος	
$EH \perp AB$	
$E\Theta \perp A\Gamma$	

7. Σε ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($ΑΒ = ΑΓ$) προεκτείνουμε τη πλευρά $ΒΓ$ κατά τμήματα $ΒΔ$ και $ΓΕ$, ώστε $ΒΔ = ΓΕ$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ΑΔΕ$ είναι ισοσκελές.



Συγκρίνουμε $\overset{\triangle}{ΑΒΔ} - \overset{\triangle}{ΑΓΕ}$:

① $ΑΒ = ΑΓ$ (δεδ.) Π

② $ΒΔ = ΓΕ$ (δεδ.) Π

③ $\hat{Β}_2 = \hat{Γ}_2$ (παραπληρωματικές $\hat{Β}_1 = \hat{Γ}_1$) Γ

$\underbrace{\qquad\qquad}$

$\overset{\triangle}{ΑΒΔ} = \overset{\triangle}{ΑΓΕ}$

Π-Γ-Π

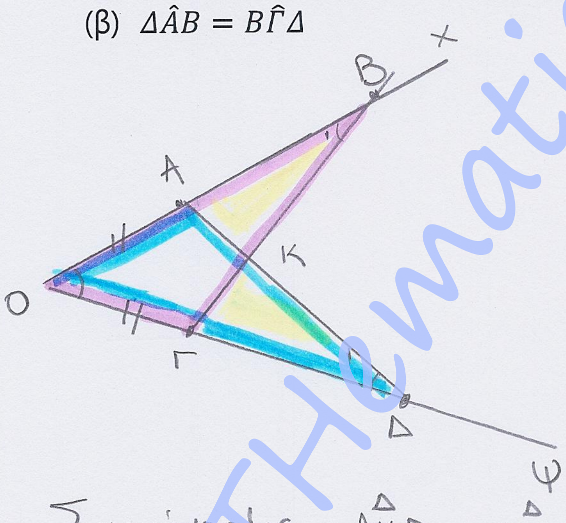
Άρα, έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα.

Άρα, $ΑΔ = ΑΕ$

Άρα, $\overset{\triangle}{ΑΔΕ}$ ισοσκελές

ΔΕΔ	ΖΗΤ
$\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ ισοσκελές	$ΑΔΕ$ ισοσκελές
$ΒΔ = ΓΕ$	

8. Έστω η γωνία $Χ\hat{Ο}Ψ$. Πάνω στην $ΟΧ$ παίρνουμε τα τμήματα $ΟΑ$ και $ΟΒ$ και πάνω στην $ΟΨ$ παίρνουμε τα τμήματα $ΟΓ$ και $ΟΔ$, ώστε $ΟΑ = ΟΓ$ και $ΟΒ = ΟΔ$. Αν $Κ$ είναι το σημείο τομής των $ΒΓ$ και $ΑΔ$ να δείξετε ότι:
   (α) τα τρίγωνα $ΟΒΓ$ και $ΟΔΑ$ είναι ίσα,
   (β) $Δ\hat{Α}Β = Β\hat{Γ}Δ$



Αποδειξη:

Συγκρίνουμε $\overset{\triangle}{ΟΓΒ} - \overset{\triangle}{ΟΑΔ}$:

① $\hat{Ο}$ κοινή γωνία Γ

② $ΟΑ = ΟΓ$ (δεδ) Π

③ $ΟΒ = ΟΔ$ (δεδ) Π

$\overset{\triangle}{ΟΓΒ} = \overset{\triangle}{ΟΑΔ}$ *

Π-Γ-Π

Συγκρίνουμε $\overset{\triangle}{ΑΚΒ} - \overset{\triangle}{ΓΚΔ}$:

① $\hat{Κ}_1 = \hat{Κ}_2$ (κατακορυφήν) Γ

② $\hat{Β}_1 = \hat{Δ}_1$ (Αφού $\overset{\triangle}{ΟΓΒ} = \overset{\triangle}{ΟΑΔ}$* $\Rightarrow \hat{Β}_1 = \hat{Δ}_1$) Γ

③ $ΑΒ = ΓΔ$ ($ΟΒ = ΟΔ$ − $ΟΑ = ΟΓ$ / $ΑΒ = ΓΔ$) Π

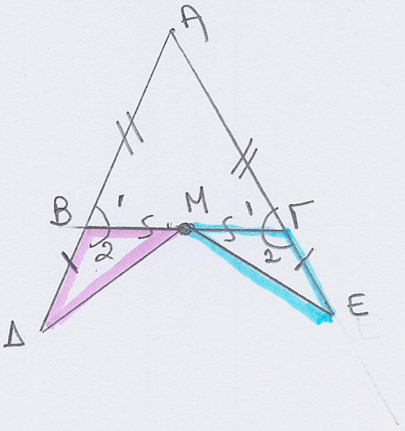
$\overset{\triangle}{ΑΚΒ} = \overset{\triangle}{ΓΚΔ}$

Π-Γ-Γ

Άρα, έχουν όλα τους τα αντίστοιχα στοιχεία ίσα

Άρα, $Δ\hat{Α}Β = Β\hat{Γ}Δ$

9. Σε ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($ΑΒ = ΑΓ$) και $Μ$ το μέσο της $ΒΓ$. Προεκτείνουμε την $ΑΒ$ κατά $ΒΔ$ και την $ΑΓ$ κατά $ΓΕ$, ώστε $ΒΔ = ΓΕ$. Να αποδείξετε ότι $ΜΔ = ΜΕ$.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Συγκρίνουμε $\overset{\triangle}{BMΔ}$ - $\overset{\triangle}{MΓE}$:

① $BM = MΓ$ (Μ μέσο) (Π)

② $\hat{B}_2 = \hat{Γ}_2$ (παραπληρωματικές $\hat{B}_1 = \hat{Γ}_1$) (Γ)

③ $BΔ = ΓE$ (δεδ) (Π)

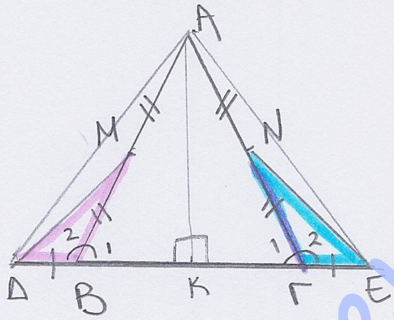
$\overset{\triangle}{BMΔ} = \overset{\triangle}{MΓE}$

Π-Γ-Π

Άρα, έχουν όλα τους τα αντίστοιχα ίσα

Άρα, $ΜΔ = ΜΕ$

10. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($ΑΒ = ΑΓ$). Τα σημεία $Μ$ και $Ν$ είναι τα μέσα των πλευρών $ΑΒ$ και $ΑΓ$ αντίστοιχα. Προεκτείνουμε τη $ΒΓ$ και προς τις δύο μεριές κατά τμήματα $ΒΔ = ΓΕ$. Να δείξετε ότι:
   (α) $ΔΜ = ΕΝ$.
   (β) Το τρίγωνο $ΑΔΕ$ είναι ισοσκελές.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Συγκρίνουμε $\overset{\triangle}{BMΔ}$ - $\overset{\triangle}{NΓE}$:

① $BM = NΓ$ ($\frac{AB}{2} = \frac{AΓ}{2}$) (Π)

② $\hat{B}_2 = \hat{Γ}_2$ (παραπληρωματικές $\hat{B}_1 = \hat{Γ}_1$) (Γ)

③ $BΔ = ΓE$ (δεδ) (Π)

$\overset{\triangle}{BMΔ} = \overset{\triangle}{NΓE}$

Π-Γ-Π

Άρα, έχουν όλα τους τα αντίστοιχα στοιχεία ίσα. Άρα, $ΔΜ = ΝΕ$

Α' ΤΡΟΠΟΣ:

Μπορούμε να συγκρίνουμε ~~τα οποία~~

$\overset{\triangle}{AΔB} = \overset{\triangle}{AΓE}$ (Π-Γ-Π)

Άρα, $ΑΔ = ΑΕ$

Άρα, ισοσκελές

Β' ΤΡΟΠΟΣ:

Φέρω το ύψος ΑΚ του $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$

$ΑΚ \perp ΒΓ \Rightarrow ΑΚ \perp ΔΕ$

Άρα, ΑΚ ύψος $\overset{\triangle}{ΑΔΕ}$

ΑΚ είναι και διάμεσος $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$

αφού $ΒΚ = ΚΓ$ και $ΔΒ = ΓΕ \Rightarrow ΔΚ = ΚΕ$

Άρα, ΑΚ διάμεσος $\overset{\triangle}{ΑΔΕ}$

Άρα, $\overset{\triangle}{ΑΔΕ}$ ισοσκελές