

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ 3

(Θέματα από τελικό γραπτό Ιουνίου 2015 Γυμνασίου Πλατύ)

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- Επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.
- Να γράφετε μόνο με μελάνι μπλε ή μαύρο, τα σχήματα με μολύβι.
- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.

ΜΕΡΟΣ Α': Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

1. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

$$(\alpha) (\chi - 4)^2 = \chi^2 - 2 \cdot \chi \cdot 4 + 4^2 = \chi^2 - 8\chi + 16$$

$$(\beta) (2\psi - 5)(2\psi + 5) = (2\psi)^2 - 5^2 = 4\psi^2 - 25$$

2. Να λύσετε το σύστημα: $\begin{array}{l} \chi + 2\psi = 1 \\ 3\chi + 7\psi = 5 \end{array}$

$$\begin{array}{r} -3\chi - 6\psi = -3 \\ 3\chi + 7\psi = 5 \\ \hline \psi = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \chi + 2\psi = 1 \\ 3\chi + 7\psi = 5 \\ \hline \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} \chi = -3 \\ \psi = 2 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \chi + 2 \cdot 2 = 1 \\ \chi = -4 \\ \chi = -3 \end{array}$$

3. Να λύσετε την εξίσωση: $3\chi^2 - 8\chi + 4 = 0$ $a=3$ $b=-8$ $c=4$

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 \\ &= 64 - 48 \\ &= 16 \end{aligned}$$

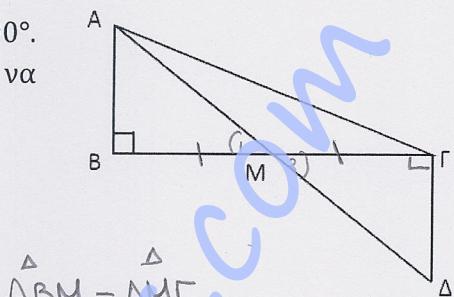
$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{8 \pm \sqrt{16}}{6} \\ &= \frac{8 \pm 4}{6} \quad \left| \begin{array}{l} \frac{8+4}{6} = 2 \\ \frac{8-4}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{array} \right. \end{aligned}$$

4. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο, με $\hat{B} = 90^\circ$. Αν AM είναι η διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$ και $\Delta\Gamma \perp BG$, να δείξετε ότι $AB = \Gamma\Delta$.

Συγκρινούμε $\triangle ABM - \triangle M\Gamma$:

- ① $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 90^\circ$ (δεδ) ①
- ② $BM = MG$ (AM διάμεσος) ②
- ③ $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ (κοινούφιον) ③

$\Pi-G-O$



$\triangle ABM = \triangle M\Gamma$
Αρα, ήταν τα συντόμα
τας ήναν ίσα.
Αρα, $AB = \Gamma\Delta$

5. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), δίνεται $\varepsilon\varphi B = \frac{12}{5}$. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\mu B$ και $\sigma\sigma\Gamma$.

$$\begin{aligned}\Pi. \Theta. \quad & Y^2 = K_1^2 + K_2^2 \\ & Y^2 = 12^2 + 5^2 \\ & Y^2 = 144 + 25 \\ & Y^2 = 169 \\ & Y = \sqrt{169} \\ & Y = 13\end{aligned}$$



$$\eta\mu B = \frac{AK}{Y} = \frac{12}{13}$$

$$\sigma\sigma\Gamma = \frac{PK}{Y} = \frac{12}{13}$$

6. Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τα πολυώνυμα:

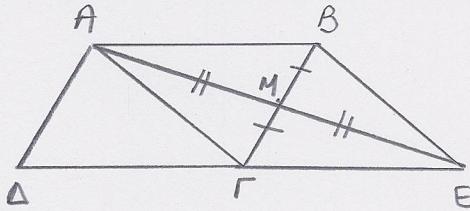
$$(\alpha) \psi^3 + 5\psi = \psi(\psi^2 + 5)$$

$$(\beta) x(x + \psi) - \psi(x + \psi) = (x + \psi)(x - \psi)$$

$$(\gamma) x^2 - 5x - 6 = (x - 6)(x + 1)$$

$$(\delta) \underbrace{x^2 + 2x\psi + \psi^2}_{=} + \underbrace{x + \psi}_{=} = (x + \psi)^2 + (x + \psi) = (x + \psi)(x + \psi + 1)$$

7. Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma D$, M είναι το μέσο της $B\Gamma$. Φέρουμε την AM και την προεκτείνουμε κατά τμήμα $ME = AM$. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $ABEG$ είναι παραλληλόγραμμο.



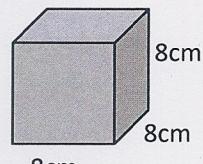
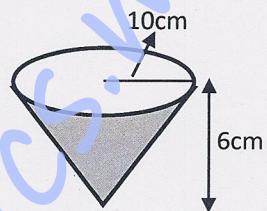
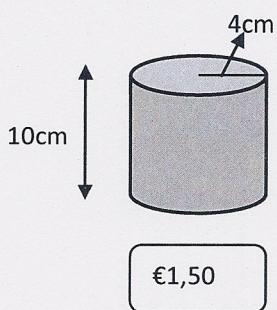
$$BM = MG \quad (\text{Η } M \text{ ήδο } B\Gamma)$$

$$AM = ME \quad (\text{Δεδομένο})$$

Οι διαγώνιοι AE και BG
διχοτομούνται

Άρα, $ABEG$ #

8. Στο κυλικείο ενός κινηματογράφου πωλούνται τρεις διαφορετικές συσκευασίες pop-corn (σιταροπούλα), όπως φαίνεται στα πιο κάτω σχήματα με το αντίστοιχο κόστος. Να εξετάσετε ποια συσκευασία συμφέρει να αγοράσει κάποιος. (Να δείξετε όλη την εργασία σας).



$$V = \pi R^2 h$$

$$V = \pi \cdot 4^2 \cdot 10$$

$$V = 160\pi$$

$$V \approx 502,4 \text{ cm}^3$$

$$V = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

$$V = \frac{\pi \cdot 10^2 \cdot 6}{3}$$

$$V = 200\pi$$

$$V \approx 628 \text{ cm}^3$$

$$V = a^3$$

$$V = 8^3$$

$$V = 512 \text{ cm}^3$$

Άρα, συκέφερα τη 2^η συσκευασία

9. Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{2x}{(x-2)(x+2)} + \frac{1}{x-2} = \frac{1}{x^2+2x}$

$$\frac{\cancel{x}}{(x-2)(x+2)} - \frac{\cancel{x}}{(x-2)} = \frac{1}{x(x+2)}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - x(x+2) = (x-2)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - x^2 - 2x - x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-1) = 0$$

$$\boxed{x=2}$$

$$\boxed{x=1}$$

απορριπτέται

δεκτή

ΕΚΠ = $x(x-2)(x+2) \neq 0$
 $x \neq 0 \quad x \neq 2 \quad x \neq -2$

10. Δίνονται τα πολυώνυμα $g(x) = 2x + 1$ και $f(x) = x^3 - 2x + 11$

(α) Να βρείτε το $f(x-2)$. (β. 2)

(β) Να αποδείξετε ότι: $f(x-2) - f(x) + 6x(x-2) + 4 = 0$ (β. 1)

(γ) Να βρείτε το $g(x) \cdot f(x-2)$ (β. 2)

$$(a) f(x-2) = (x-2)^3 - 2(x-2) + 11$$

$$= x^3 - 3x^2 \cdot 2 + 3x^2 \cdot 2^2 - 2^3 - 2x + 4 + 11$$

$$= x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - 2x + 4 + 11$$

$$= x^3 - 6x^2 + 10x + 7$$

$$(b) A\mu = x^3 - 6x^2 + 10x + 7 - (x^3 - 2x + 11) + 6x(x-2) + 4$$

$$= x^3 - 6x^2 + 10x + 7 - x^3 + 2x - 11 + 6x^2 - 12x + 4$$

$$= 0$$

$$= B\mu$$

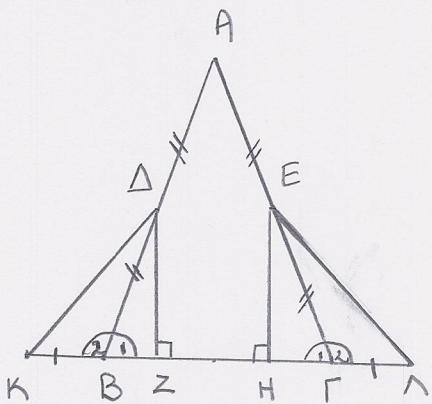
$$(g) g(x) \cdot f(x-2) = (2x+1)(x^3 - 6x^2 + 10x + 7)$$

$$= 2x^4 - 12x^3 + 20x^2 + 14x + x^3 - 6x^2 + 10x + 7$$

$$= 2x^4 - 11x^3 + 14x^2 + 24x + 7$$

ΜΕΡΟΣ Α': Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

1. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABG ($AB = AG$). Στην προέκταση της βάσης BG παίρνουμε τα ευθύγραμμα τμήματα BK και GL , τέτοια ώστε $BK = GL$. Αν Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών AB και AG αντίστοιχα, να δείξετε ότι:
- Τα τρίγωνα $B\Delta K$ και EGL είναι ίσα.
 - Οι αποστάσεις ΔZ και EH των σημείων Δ και E από τη βάση BG , είναι ίσες.



Σύγκρινουμε $\triangle B\Delta K - \triangle EGL$:

- $B\Delta = GE$ ($\frac{AB}{2} = \frac{AG}{2}$) \textcircled{P}
- $KB = GL$ (δεξ.) \textcircled{P}
- $\hat{B}_2 = \hat{G}_2$ (παραλληλισμοί) \textcircled{P}

$\left. \begin{matrix} \textcircled{P} \\ \textcircled{G} \end{matrix} \right\} \text{Π-Γ-Π}$

$$\triangle B\Delta K = \triangle EGL$$

Σύγκρινουμε $\triangle B\Delta Z - \triangle EHG$:

- $\hat{Z} = \hat{H} = 90^\circ$ (αποστάσεις) \textcircled{O}
- $\hat{B}_1 = \hat{G}_1$ (ισοσκελές) \textcircled{P}
- $B\Delta = EG$ ($\frac{AB}{2} = \frac{AG}{2}$) \textcircled{P}

$\left. \begin{matrix} \textcircled{O} \\ \textcircled{P} \\ \textcircled{P} \end{matrix} \right\} \text{Π-Γ-Ο}$

$$\triangle B\Delta Z = \triangle EHG$$

όχι τα ανυποτιχα
στοιχεία ήσα

Άρα, $\Delta Z = EH$

2. Η διπλανή ξύλινη κατασκευή αποτελείται από μια πυραμίδα τοποθετημένη πάνω σε ένα τετραγωνικό πρίσμα, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν το ύψος της πυραμίδας είναι 4 m , το εμβαδόν της βάσης του πρίσματος 36 m^2 και ο όγκος του πρίσματος 252 m^3 , να υπολογίσετε:

(α) Τον όγκο του στερεού.

$$V_{\text{πρισ}} = Eb \cdot v$$

$$\frac{252}{36} = \frac{36 \cdot v}{36}$$

$$v = 7 \text{ m}$$

$$Eb = a^2$$

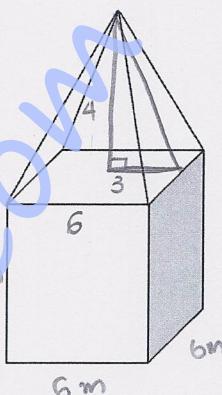
$$36 = a^2$$

$$a = \sqrt{36}$$

$$a = 6 \text{ m}$$

(β. 2)

$$\begin{aligned} V_{\text{στερ}} &= V_{\text{πρισμ}} + V_{\text{πυρ}} \\ &= 252 + \frac{Eb \cdot v}{3} \\ &= 252 + \frac{36 \cdot 4}{3} \\ &= 252 + 48 \\ &= 300 \text{ m}^3 \end{aligned}$$



Πιθανόρευτα τριάδα
3, 4, 5
 $h = 5 \text{ m}$

(β) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού.

(β. 6)

$$\begin{aligned} E_{\text{συν}} &= E_b + E_p_{\text{πρισμ}} + E_p_{\text{πυρ}} \\ &= 36 + \pi b \cdot v + \frac{\pi b \cdot h}{2} \\ &= 36 + 24 \cdot 7 + \frac{24 \cdot 5}{2} \\ &= 36 + 168 + 60 \\ &= 264 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

(γ) Αν χρειάζεται να βαστεί όλη η ξύλινη κατασκευή εξωτερικά (χωρίς το πάτωμα) με μπογιά που στοιχίζει €5,50 το κάθε τετραγωνικό μέτρο, να υπολογίσετε το συνολικό κόστος της μπογιάς.

$$\begin{aligned} K_{\text{κόστος}} &= 228 \cdot 5,50 \\ &= \text{€1254} \end{aligned}$$

(β. 2)

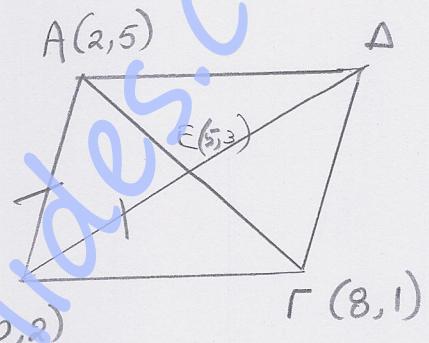
$$\begin{aligned} E &= E_p_{\text{πρισμ}} + E_p_{\text{πυραμ}} \\ &= 168 + 60 \\ &= 228 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

3. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με κορυφές $A(2,5)$, $B(0,2)$ και $\Gamma(8,1)$.

- (α) Αν E είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του, να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του E .
- (β) Αν $E(5,3)$, να δείξετε ότι το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές.
- (γ) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$.
- (δ) Αν η εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$ είναι $x + 8y = 16$, να βρείτε την εξίσωση της πλευράς $A\Delta$.

E μέσο $A\Gamma$

$$\begin{aligned} x_E &= \frac{x_1+x_2}{2} & \psi_E &= \frac{\psi_1+\psi_2}{2} \\ &= \frac{2+8}{2} & &= \frac{5+1}{2} \\ &= 5 & &= 3 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} E(5,3)$$



$$\begin{aligned} AE &= \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (\psi_2-\psi_1)^2} \\ &= \sqrt{(2-5)^2 + (5-3)^2} \\ &= \sqrt{9+4} \\ &= \sqrt{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EB &= \sqrt{(5-0)^2 + (3-2)^2} \\ &= \sqrt{25+1} \\ &= \sqrt{26} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(5-2)^2 + (2-0)^2} \\ &= \sqrt{9+4} \\ &= \sqrt{13} \end{aligned}$$

$AE = AB$
 $\triangle ABE$
ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ

$B\Gamma\delta$

$$J_{B\Gamma} = \frac{\Delta\psi}{\Delta x} = \frac{2-1}{0-8} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8} \Rightarrow \boxed{\alpha = -\frac{1}{8}}$$

$$\begin{cases} \psi = \alpha x + b \\ \psi = -\frac{1}{8}x + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = -\frac{1}{8} \cdot 0 + b \\ 2 = b \end{cases}$$

$(0, 2)$

$$\begin{aligned} B\Gamma &: \psi = -\frac{1}{8}x + 2 \\ 8\psi &= -x + 16 \\ x + 8\psi &= 16 \end{aligned}$$

$A\Delta \parallel B\Gamma$

$$J_{A\Delta} = J_{B\Gamma} = -\frac{1}{8} \Rightarrow \boxed{\alpha = -\frac{1}{8}}$$

$A(2,5)$

$$\begin{cases} \psi = \alpha x + b \\ \psi = -\frac{1}{8}x + b \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcl} 5 & = & -\frac{1}{8} \cdot 2 + b \\ \hline + & & \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 5 & = & -\frac{1}{4} + b \\ \hline \hline & & \hline \end{array}$$

$$20 = -1 + 4b$$

$$\frac{4b}{4} = \frac{21}{4}$$

$$\boxed{b = \frac{21}{4}}$$

$$\psi = -\frac{1}{8}x + \frac{21}{4}$$

$$8\psi = -x + 42$$

$$x + 8\psi = 42$$

$$4. \text{ Δίνονται τα κλάσματα: } A = \left(\frac{x^2}{x} - \frac{1}{x} \right) : \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{1} + 1 \right) \quad \text{και} \quad B = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) \cdot (x^2 - 1)$$

(α) Να δείξετε ότι $A = x - 1$ και $B = \frac{x-1}{x}$. (β. 7)

(β) Χρησιμοποιώντας τις παραστάσεις των A και B που βρήκατε πιο πάνω, να δείξετε ότι η παράσταση $\frac{A}{B} - \frac{x^2-1}{x-1} = -1$ (β. 3)

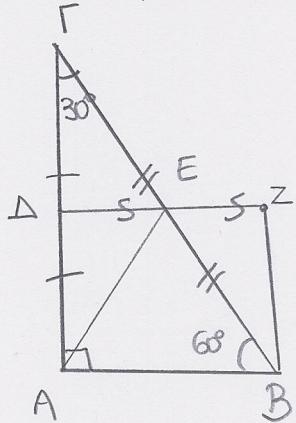
$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{x^3-1}{x} \right) : \left(\frac{1+x^2+x}{x} \right) \\ &= \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x} \cdot \frac{x}{(x^2+x+1)} \\ &= x-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{x+1-x}{x(x+1)} \cdot \frac{x^2-1}{x^2-1} \\ &= \frac{1}{x(x+1)} \cdot \frac{(x-1)(x+1)}{x(x+1)} \\ &= \frac{x-1}{x} \end{aligned}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{\frac{x-1}{1}}{\frac{x-1}{x}} = \frac{x(x-1)}{(x-1)} = x$$

$$\begin{aligned} A\mu &= \frac{A}{B} - \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} \\ &= x - (x+1) \\ &= x - x - 1 \\ &= -1 \\ &= B\mu \end{aligned}$$

5. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABG με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 60^\circ$. Τα σημεία D και E είναι τα μέσα των πλευρών AG και BG αντίστοιχα. Προεκτείνουμε το ΔE κατά τμήμα $EZ = \Delta E$. Να αποδείξετε ότι:
- Το ΔZEB είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.
 - Το ΔAEB είναι ισόπλευρο τρίγωνο.



$$\left. \begin{array}{l} \Delta \text{ μέσο } AG \\ E \text{ μέσο } BG \end{array} \right\} \Delta E \stackrel{\parallel}{=} \frac{AB}{2} \quad \left. \begin{array}{l} \Delta Z \stackrel{\parallel}{=} AB \\ \Delta ZBA \end{array} \right\}$$

$$\Delta E = EZ \text{ (δεδομένο)}$$

$$\hat{A} = 90^\circ \text{ (δεδομένο)}$$

$$\Delta ZBA \#$$

ΔZBA
ορθογώνιο
Παραλληλόγραμμο

$$\left. \begin{array}{l} \Delta ABG \text{ (opθ.) } A = 90^\circ \\ AE \text{ σιάκεος} \end{array} \right\}$$

$$AE = \frac{BG}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta ABG \text{ opθ.} \\ \hat{F} = 30^\circ \end{array} \right\} AB = \frac{BG}{2}$$

$$E \text{ μέσο } BG \rightarrow BE = \frac{BG}{2}$$

$$AE = EB = AB$$

$\Delta E B$
ισόπλευρο τρίγωνο