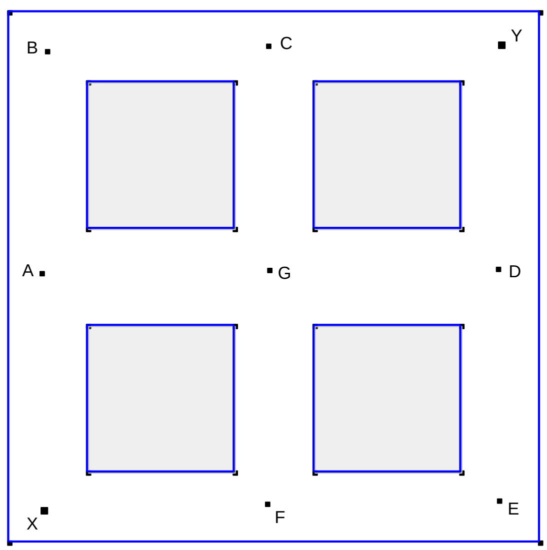
	ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ ***ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΚΥΤΑΛΟΔΡΟΜΙΑ 2007*** ***ΓΙΑ ΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ*** ***Παρασκευή 26 Ιανουαρίου 2007*** ***Τάξη: Α΄ Γυμνασίου***

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται τμήμα ενός πολεοδομικού σχεδίου μιας πόλης. Οι σκιασμένες επιφάνειες είναι κτίρια. Να βρείτε πόσες είναι όλες οι δυνατές διαδρομές με τις οποίες μπορούμε να πάμε από το σημείο X στο σημείο Y, αν σε κάθε διαδρομή περνάμε μόνο μια φορά από οποιονδήποτε δρόμο.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ



Όλες οι δυνατές διαδρομές είναι: XABCY, XABCGDY, XABCGFEDY, XAGCY, XAGDY, XAGFEDY,
XFEDY, XFEDGCY, XFEDGABCY, XFGDY,
XFGCY, XFGABCY.

Απάντηση: 12 δυνατές διαδρομές.

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΚΥΤΑΛΟΔΡΟΜΙΑ 2007

ΓΙΑ ΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ

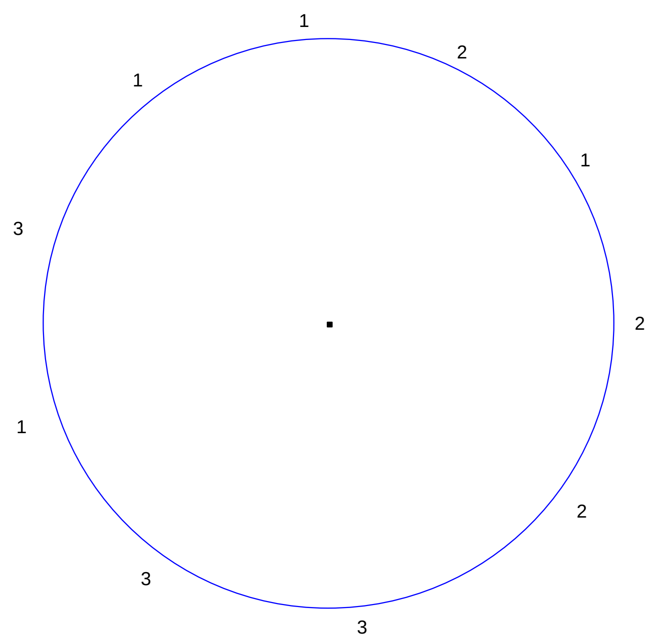
Παρασκευή 26 Ιανουαρίου 2007

Τάξη: Β΄ Γυμνασίου

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Να τοποθετήσετε πάνω σε κύκλο τα ψηφία 1,1,1,1,2,2,2,3,3,3 έτσι ώστε το άθροισμα οποιονδήποτε τριών διαδοχικών ψηφίων να μην είναι πολλαπλάσιο του 3.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ



Μια τοποθέτηση φαίνεται στο πιο πάνω σχήμα.

	ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ ***ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΚΥΤΑΛΟΔΡΟΜΙΑ 2007*** ***ΓΙΑ ΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ*** ***Παρασκευή 26 Ιανουαρίου 2007*** ***Τάξη: Γ΄ Γυμνασίου***

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Κάποιος άρχισε να διαβάζει ένα βιβλίο την 1^{η} Δεκεμβρίου. Κάθε μέρα διάβαζε τον ίδιο αριθμό σελίδων και τέλειωσε το βιβλίο την 31^{η} Δεκεμβρίου του ίδιου χρόνου. Αν την πρώτη μέρα διάβαζε το $\frac{1}{4}$ του αριθμού των σελίδων που (αρχικά) διάβαζε και κάθε επόμενη μέρα διάβαζε μια σελίδα παραπάνω από την προηγούμενη μέρα, τότε θα τέλειωνε το βιβλίο και πάλι την 31^{η} Δεκεμβρίου. Να βρείτε πόσες σελίδες έχει το βιβλίο.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ

Έστω x ο αριθμός των σελίδων, που διάβαζε κάθε μέρα.
Στην πρώτη περίπτωση ο αριθμός των σελίδων είναι $31x$.
Στη δεύτερη περίπτωση ο αριθμός των σελίδων είναι

$$\frac{x}{4}+\left(\frac{x}{4}+1\right)+\left(\frac{x}{4}+2\right)+\left(\frac{x}{4}+3\right)+\ldots+\left(\frac{x}{4}+30\right).$$

Άρα έχουμε την εξίσωση

$$31x=\frac{x}{4}+\left(\frac{x}{4}+1\right)+\left(\frac{x}{4}+2\right)+\left(\frac{x}{4}+3\right)+\ldots+\left(\frac{x}{4}+30\right)\Leftrightarrow$$

$$31x=\frac{31x}{4}+\left(1+2+3+\ldots+30\right)\Leftrightarrow$$

$$31x=\frac{31x}{4}+\frac{(30+1)\cdot 30}{2}\Leftrightarrow$$

$$124x=31x+1860\Leftrightarrow$$

$$93x=1860\Leftrightarrow$$

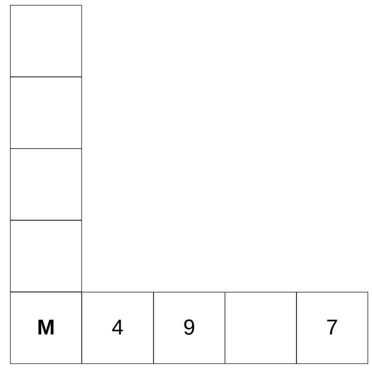
$$x=20.$$

Απάντηση: το βιβλίο έχει $31\cdot 20=620$ σελίδες.

ΛΥΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΣΚΥΤΑΛΟΔΡΟΜΙΑΣ
ΠΑΦΟΣ 1η Φεβρουαρίου 2008

Α΄ Γυμνασίου.

Οι αριθμοί 1 μέχρι το 9 τοποθετούνται ένας σε κάθε τετράγωνο στο διπλανό σχήμα χωρίς να επιτρέπεται επανάληψη ψηφίων. Το άθροισμα των πέντε αριθμών στην οριζόντια γραμμή είναι ίσο με το άθροισμα των πέντε στην κατακόρυφη στήλη. Να βρείτε τις διαφορετικές τιμές που μπορεί να πάρει ο αριθμός Μ.



Προτεινόμενη Λύση: Αν ονομάσουμε με Σ_4 το άθροισμα των τεσσάρων ψηφίων , εκτός του Μ της στήλης τότε έχουμε: $20 < \Sigma_4 \leq 22$, άρα $\Sigma_4 = 21$ ή $\Sigma_4 = 22$.Επίσης έχουμε ότι το άθροισμα των τεσσάρων ψηφίων της κατακόρυφης στήλης είναι ίσο με το άθροισμα των τεσσάρων ψηφίων της οριζόντιας στήλης, άρα έχουμε δύο περιπτώσεις:

- Αν $\Sigma_4 = 21$, τότε $\Sigma_4 = 8+6+5+2 = 21 = 4+9+7+1$, άρα **Μ=3.**
- Αν $\Sigma_4 = 22$, τότε $\Sigma_4 = 8+6+5+3 = 22 = 4+9+7+2$, άρα **Μ=1.**

Β΄ Γυμνασίου.

Σε τελικό γύρο του Παγκύπριου σχολικού πρωταθλήματος ποδοσφαίρου των Γυμνασίων που θα διεξαχθεί στην Πάφο, έχουν προκριθεί 8 ομάδες οι οποίες χωρίζονται σε δύο ομίλους των 4 ομάδων. Κάθε ομάδα του ομίλου παίζει ένα παιχνίδι με όλες τις ομάδες του ομίλου της. Για κάθε νίκη μια ομάδα παίρνει 3 βαθμούς, για ισοπαλία 1 βαθμό και 0 βαθμούς για ήττα. Από κάθε όμιλο προκρίνονται 2 ομάδες. Κάθε ομάδα που προκρίνεται παίρνει όχι λιγότερους βαθμούς από τις ομάδες που δεν προκρίνονται.

(α) Ποιο είναι το μικρότερο δυνατό σύνολο βαθμών που θα μπορούσε να συγκεντρώσει μια ομάδα και να προκριθεί;

(β) Ποιο είναι το μεγαλύτερο δυνατό σύνολο βαθμών που μπορεί να συγκεντρώσει μια ομάδα και τελικά να μην προκριθεί;

Προτεινόμενη Λύση:

(a) Αν μια ομάδα του ομίλου κερδίσει όλα τα παιγνίδια και τα υπόλοιπα όλα παιγνίδια έρθουν ισόπαλα τότε η δεύτερη ομάδα που θα προκριθεί έχει συγκεντρώσει 2 βαθμούς. Μένει να αποδείξουμε ότι μια ομάδα δεν μπορεί να προκριθεί αν συγκεντρώσει λιγότερους από 2 βαθμούς.

Πράγματι αν μια ομάδα συγκεντρώσει το πολύ 1 βαθμό, αυτή πρέπει να έχει χάσει τουλάχιστον 2 παιχνίδια. Επομένως οι ομάδες που κέρδισαν θα έχουν τουλάχιστον 3 βαθμούς και άρα θα είναι πάνω από την Α στη βαθμολογία, δηλαδή η Α ομάδα δεν θα είναι στους δυο πρώτους του ομίλου.

(β) Αν μια ομάδα του ομίλου ηττηθεί σε όλα τα παιχνίδια και οι άλλες τρεις κερδίσουν κυκλικά δηλαδή η Χ κερδίζει την Υ, η Υ κερδίζει την Ζ και η Ζ κερδίζει την Χ τότε τρεις ομάδες συγκεντρώνουν 6 βαθμούς και μια από αυτές δεν προκρίνεται. Μένει να αποδείξουμε ότι μια ομάδα που συγκεντρώνει περισσότερους από 7 βαθμούς προκρίνεται. Πράγματι αν η ομάδα Α πάρει τουλάχιστον 7 βαθμούς πρέπει να έχει κερδίσει τουλάχιστον 2 παιχνίδια. Οι ομάδες που έχασαν θα έχουν το πολύ 6 βαθμούς, άρα η Α προκρίνεται.

Γ΄ Γυμνασίου

Ο Μαθηματικός κος Γιώργος όταν ρωτήθηκε πόσων χρονών είναι απάντησε: «Η ηλικία μου είναι διψήφιος αριθμός, είμαι μεγαλύτερος από την γυναίκα μου και αν εναλλάξετε την θέση των ψηφίων της ηλικίας μου τότε θα βρείτε την ηλικία της γυναίκας μου. Επιπλέον, η διαφορά των τετραγώνων των ηλικιών μας είναι τετράγωνο ακέραιου αριθμού». Ποιες είναι η ηλικίες του κου Γιώργου και της γυναίκας του;

<u>Προτεινόμενη Λύση:</u>

Έστω xy=10x+y η ηλικία του Μαθηματικού και άρα η ηλικία της γυναίκας του είναι: yx=10y+x με x>y.
Από την υπόθεση του προβλήματος έχουμε:

$$\left(10x+y\right)^2-\left(10y+x\right)^2=k^2\ ,\ k\in\mathbb{Z}\,.$$

Κάνοντας τις πράξεις θα πάρουμε:

$$99\left(x^2-y^2\right)=k^2 \Leftrightarrow 99\left(x-y\right)\left(x+y\right)=k^2$$

Επειδή $99=3^2\cdot 11$, θα πρέπει $\left(x-y\right)\left(x+y\right)=11$, άρα έχουμε:

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=11 \end{cases}$$

Λύνοντας το σύστημα παίρνουμε $x=6$ και $y=5$.

Επομένως η ηλικία του κ. Γιώργου είναι 65 ετών και η γυναίκα του είναι 56 ετών.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Στις σημειώσεις ενός δασκάλου ήταν γραμμένο ότι αγόρασε 72 φανέλες για τους άπορους μαθητές του σχολείου και πλήρωσε συνολικά € _67,9_ όπου το πρώτο και το τελευταίο ψηφίο του ποσού είναι δυσανάγνωστα και για το λόγο αυτό αντικαθίστανται με τις παύλες (_).
Να βρείτε τα δυο δυσανάγνωστα ψηφία και την τιμή της κάθε φανέλας.

Προτεινόμενη λύση.

Το ποσό είναι _679_ σέντς , πρέπει να διαιρείται με το $72 = 2^3 \cdot 3^2$ Έτσι το τελευταίο ψηφίο μπορεί να είναι 0 ή 2 ή 4 ή 6 ή 8 και επειδή πρέπει να διαιρείται με το 4, το τελευταίο ψηφίο είναι 2 ή 6.
Αν το τελευταίο είναι το 6, τότε το άθροισμα των ψηφίων πρέπει να διαιρείται με το 9 και το πρώτο ψηφίο πρέπει να είναι το 8, λάθος γιατί ο 86796 δεν διαιρείται με το 72.
Άρα το τελευταίο ψηφίο είναι το 2 και το πρώτο πρέπει να είναι το 3 η τιμή δε της κάθε φανέλας είναι € 5,11

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΚΥΤΑΛΟΔΡΟΜΙΑ 2009

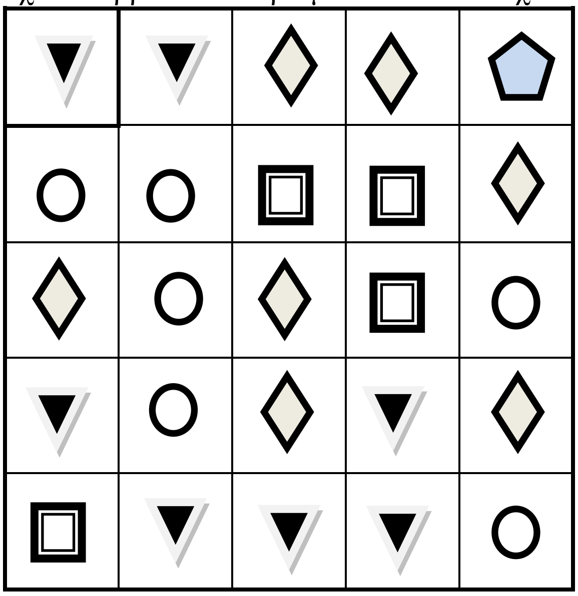
ΓΙΑ ΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ

Πέμπτη 29 Ιανουαρίου 2009 – ΛΕΜΕΣΟΣ

Τάξη: Β΄ Γυμνασίου

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Στον παρακάτω 5Χ5 πίνακα τα γεωμετρικά σχήματα αντιστοιχούν σε διαφορετικούς φυσικούς αριθμούς. Στο δεξιό και στο κάτω μέρος του πίνακα οι αριθμοί αντιστοιχούν στο άθροισμα των αριθμών της κάθε γραμμής και της κάθε στήλης αντίστοιχα. Να βρείτε τον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε γεωμετρικό σχήμα.

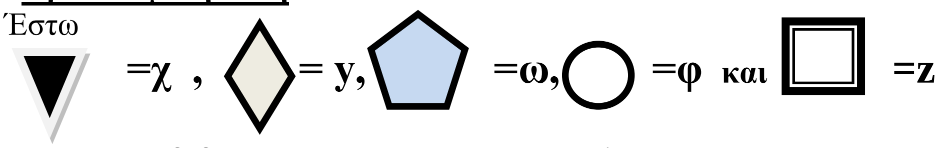


39
42
43
43
40

42 37 47 44 37

Προτεινόμενη λύση.

Έστω



Τότε από τα δεδομένα του πίνακα έχουμε τις εξισώσεις:

$2\chi + 2y + \omega = 39$ **(1)**
$2\varphi + 2z + y = 42$ **(2)**
$2y + 2\varphi + z = 43$ **(3)**
$2\chi + 2y + \varphi = 43$ **(4)**
$z + 3\chi + \varphi = 40$ **(5)**
$2\chi + \varphi + z + y = 42$ **(6)**
$3\varphi + 2\chi = 37$ **(7)**
$3y + z + \chi = 47$ **(8)**
$2\chi + 2z + y = 44$ **(9)**
$\omega + 2y + 2\varphi = 37$ **(10)**

Αφαιρώντας την (2) από την (3) παίρνουμε την εξίσωση: $y - z = 1$ (Α)
Αφαιρώντας την (4) από την (5) έχουμε : $2y - x - z = 3$ (Β)
Αντικαθιστώντας την (Α) στην (Β) παίρνουμε: $z - x = 1$ (Γ).
Από τις εξισώσεις (5) και (6) έχουμε:
$\varphi + z = 40 - 3x$
$\varphi + z = 42 - 2\chi - y$
Άρα $42 - 2\chi - y = 40 - 3\chi \Rightarrow y = x + 2$ (Δ)
Από την (8) και την (Δ) παίρνουμε: $4\chi + z = 41$ (Ε)
Η (Ε) και η (Γ) μας δίνει **χ=8** και άρα **y=10** και εύκολα έχουμε στην συνέχεια ότι:
φ=7, z=9 και ω=3. Οι τιμές αυτές επαληθεύουν τα δεδομένα του πίνακα.

	ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ ***ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΚΥΤΑΛΟΔΡΟΜΙΑ 2009*** ***ΓΙΑ ΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ*** ***Πέμπτη 29 Ιανουαρίου 2009 – ΛΕΜΕΣΟΣ*** ***Τάξη: Γ΄ Γυμνασίου***

<u>ΠΡΟΒΛΗΜΑ</u>

Δίνεται ένας τετραψήφιος θετικός ακέραιος αριθμός, έστω χ, και σχηματίζουμε την διαφορά

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{\chi} - (\textbf{άθροισμα των τετραγώνων των ψηφίων του αριθμού } \boldsymbol{\chi})$$

Να βρείτε:

(α) ποια είναι η μεγαλύτερη δυνατή τιμή που μπορεί να πάρει το **Α**.

(β) ποια είναι η μικρότερη δυνατή τιμή που μπορεί να πάρει το **Α**.

<u>Προτεινόμενη λύση</u>.

Έστω $\chi = \overline{\alpha\beta\gamma\delta} = 10^3\alpha + 10^2\beta + 10\gamma + \delta$, με $1 \leq \alpha \leq 9$, $0 \leq \beta, \gamma, \delta \leq 9$.

$A = \alpha(10^3 - \alpha) + \beta(10^2 - \beta) + \gamma(10 - \gamma) + \delta(1 - \delta)$.

(α) Η παράσταση γίνεται μέγιστη, όταν κάθε όρος της πάρει τη μέγιστη δυνατή τιμή και αυτό γίνεται όταν $\alpha = 9, \beta = 9, \gamma = 5$ $και$ $\delta = 0$ ή 1. Άρα $A_{max} = 8919 + 819 + 25 + 0 = 9763$.

(β) Η παράσταση γίνεται ελάχιστη, όταν κάθε όρος της πάρει την ελάχιστη δυνατή τιμή και αυτό Γίνεται όταν $\alpha = 1, \beta = \gamma = 0$ $και$ $\delta = 9$. Άρα $A_{min} = 999 + 0 + 0 - 72 = 927$.

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΚΥΤΑΛΟΔΡΟΜΙΑ 2010

ΓΙΑ ΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ

Παρασκευή 29 Ιανουαρίου 2010 – ΛΕΜΕΣΟΣ

Τάξη: Α΄ Γυμνασίου

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Ένας γεωργός έχει αγοράσει δενδρύλλια ελιάς τα οποία θα φυτέψει σε ένα χωράφι του σε σειρές και θέλει να φυτέψει 8 ή 7 σε κάθε σειρά. Παρατηρεί ότι, αν φυτέψει 8 δενδρύλλια σε κάθε σειρά θα του μείνουν 4 θέσεις κενές σε μια σειρά, ενώ αν φυτέψει 7 δενδρύλλια σε κάθε σειρά θα του μείνουν 2 δενδρύλλια αφύτευτα. Να βρείτε τον ελάχιστο αριθμό δενδρυλλίων που έχει αγοράσει ο γεωργός και σε πόσες σειρές θα τα φυτέψει όλα.

Προτεινόμενη λύση 1.

Τα θετικά πολλαπλάσια του 8 αυξημένα σταθερά κατά 4 είναι:

$$1\cdot 8+4=12$$
$$2\cdot 8+4=20$$
$$3\cdot 8+4=28$$
$$4\cdot 8+4=36$$
$$\boxed{5\cdot 8+4=44}$$
$$6\cdot 8+4=52$$
$$\vdots$$

Τα θετικά πολλαπλάσια του 7 αυξημένα σταθερά κατά 2 είναι:

$$1\cdot 7+2=9$$
$$2\cdot 7+2=16$$
$$3\cdot 7+2=23$$
$$4\cdot 7+2=30$$
$$5\cdot 7+2=37$$
$$\boxed{6\cdot 7+2=44}$$
$$\vdots$$

Άρα ο ελάχιστος αριθμός δενδρυλλίων που αγόρασε ο γεωργός είναι 44 και τα φύτεψε σε 6 σειρές.

$$5\ \sigma\varepsilon\iota\rho\acute{\varepsilon}\varsigma\ \cdot 8\ \delta\acute{\varepsilon}\nu\tau\rho\alpha\ =40$$
$$1\ \sigma\varepsilon\iota\rho\acute{\alpha}\ \cdot 4\ \delta\acute{\varepsilon}\nu\tau\rho\alpha=4.$$

Προτεινόμενη λύση 2.

Αν x το πλήθος των δέντρων που αγόρασε ο γεωργός τότε έχουμε το εξής σύστημα:

$$x\equiv 4(mod8)\qquad (1)$$
$$x\equiv 2(mod7)\qquad (2)$$

Από την (1) έχουμε $x=4+8\kappa,\ \kappa\in\mathbb{Z}$ (3), και αντικαθιστώντας στην (2) θα πάρουμε

$$8\kappa\equiv -2(mod7)\ \ \text{Όμως}\ -2\equiv 40(mod7)$$

Άρα από τις δυο τελευταίες ισοτιμίες παίρνουμε $8\kappa\equiv 40=8\cdot 5(mod7)$ και επειδή $(8,7)=1$ θα πάρουμε $\kappa\equiv 5(mod7)\Rightarrow \kappa=5+7\mu,\ \mu\in\mathbb{Z}$, επομένως η (3) μας δίνει

$$x=4+8(5+7\mu)=44+56\mu$$

Άρα η ελάχιστη θετική λύση της τελευταίας εξίσωσης είναι $x=44$ δενδρύλλια και τα φύτεψε σε 6 σειρές.

$$5\ \sigma\varepsilon\iota\rho\acute{\varepsilon}\varsigma\ \cdot 8\ \delta\acute{\varepsilon}\nu\tau\rho\alpha\ =40$$
$$1\ \sigma\varepsilon\iota\rho\acute{\alpha}\ \cdot 4\ \delta\acute{\varepsilon}\nu\tau\rho\alpha=4.$$

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΚΥΤΑΛΟΔΡΟΜΙΑ 2010

ΓΙΑ ΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ

Παρασκευή 29 Ιανουαρίου 2010 – ΛΕΜΕΣΟΣ

Τάξη: Β΄ Γυμνασίου

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Το ημερήσιο γεύμα ενός εστιατορίου αποτελείται από 4 είδη: ζυμαρικό, κρέας, χόρτα-όσπρια και επιδόρπιο. Κάθε είδος επιλέγεται από την αντίστοιχη στήλη του παρακάτω πίνακα.

Το πρώτο γεύμα προσφέρθηκε την $1^{η}$ Ιανουαρίου 2010 και ήταν:

σπαγγέτι, χοιρινό, φασόλια και φρουτοσαλάτα.

Το γεύμα κάθε επόμενης ημέρας καταρτίζεται, παίρνοντας το επόμενο συστατικό κάθε στήλης και όταν τα συστατικά μιας στήλης εξαντληθούν, επανερχόμαστε στην αρχή της στήλης.

Έτσι π.χ το γεύμα της $2^{ης}$ Ιανουαρίου 2010 ήταν : ταλιατέλες, αρνί, κουνουπίδι και μηλόπιτα.

i) Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός ημερών που θα περάσουν προτού ένα γεύμα επαναληφθεί ακριβώς το ίδιο (ξεκινώντας από $1^{η}$ Ιανουαρίου 2010);

ii) Ποιο είναι το σημερινό γεύμα (29 Ιανουαρίου 2010);

iii) Ποιο θα είναι το γεύμα των Χριστουγέννων 2010 (25 Δεκεμβρίου 2010);

Ζυμαρικό	Κρέας	Χόρτα-Όσπρια	Επιδόρπιο
Σπαγγέτι	Χοιρινό	Φασόλια	Φρουτοσαλάτα
Ταλιατέλες	Αρνί	Κουνουπίδι	Μηλόπιτα
Κανελόνια	Κοτόπουλο	Μπρόκολο	Παγωτό
Κρέπες	Γαλοπούλα	Μπιζέλια	
	Βοδινό	Ντομάτα	
		Μαρούλι	
		Καρότα	

***Προτεινόμενη λύση*.**

i) Το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο του αριθμού των φαγητών της κάθε κατηγορίας είναι

$$E.K.\Pi(2^2,5,7,3) = 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3 = 420$$

Άρα θα περάσουν 420 μέρες προτού ένα γεύμα επαναληφθεί ακριβώς το ίδιο.
Δηλαδή την $421^{η}$ μέρα το γεύμα θα είναι αυτό της $1^{ης}$ Ιανουαρίου 2010.

ii) Επειδή $29 = 4 \cdot 7 + 1 = 5 \cdot 5 + 4 = 7 \cdot 4 + 1 = 3 \cdot 9 + 2$
Το γεύμα της $29^{ης}$ Ιανουαρίου είναι:

Σπαγγέτι, Γαλοπούλα, Φασόλια, Μηλόπιτα.

iii) Τα Χριστούγεννα είναι η $359^{η}$ μέρα για το έτος 2010 άρα θα έχουμε:
$359 = 4 \cdot 89 + 3 = 5 \cdot 71 + 4 = 7 \cdot 51 + 2 = 3 \cdot 119 + 2$
Το γεύμα της $25^{ης}$ Δεκεμβρίου είναι:

Κανελόνια, Γαλοπούλα, Κουνουπίδι, Μηλόπιτα.

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΚΥΤΑΛΟΔΡΟΜΙΑ 2010

ΓΙΑ ΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ

Παρασκευή 29 Ιανουαρίου 2010 – ΛΕΜΕΣΟΣ

Τάξη: Γ΄ Γυμνασίου

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Στο παρακάτω σχήμα το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ παριστάνει ένα σπίτι με διαστάσεις 24m και 7m το οποίο περικλείεται από κήπο που δημιουργήθηκε από τον αρχιτέκτονα του σπιτιού ως εξής:

α) Από το ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ=24m.

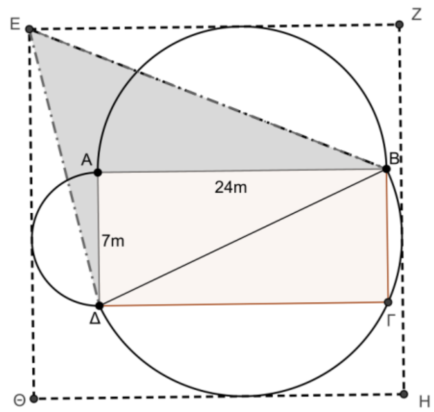
β) Από το ημικύκλιο διαμέτρου ΑΔ=7m και

γ) Από τα δύο κυκλικά τμήματα που δημιουργήθηκαν από το ημικύκλιο με διάμετρο την διαγώνιο ΒΔ του ορθογωνίου.

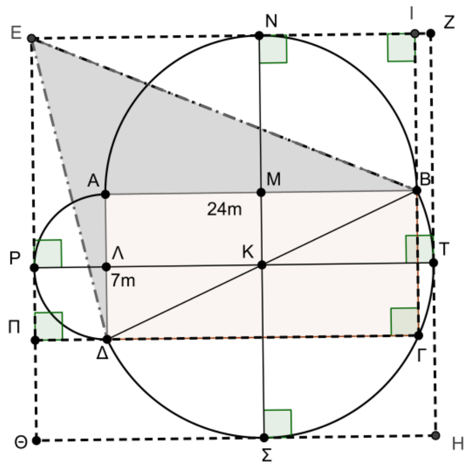
Ο ιδιοκτήτης θέλει να περιφράξει το σπίτι του με περίφραξη που θα εφάπτεται στα ημικύκλια και θα είναι τα τμήματά της παράλληλα με τις πλευρές του ορθογωνίου όπως φαίνεται στο σχήμα. Στην συνέχεια ο αρχιτέκτονας προτείνει στον ιδιοκτήτη να σχηματίσει το τρίγωνο ΕΒΔ και να πλακοστρώσει το μέρος του τριγώνου που βρίσκεται έξω από το ΑΒΓΔ. Να υπολογίσετε:

Α. Πόσα μέτρα περίφραξης θα χρειαστεί ο ιδιοκτήτης και

Β. Ποιο είναι το εμβαδόν του μέρους του τριγώνου ΕΒΔ που θα πλακοστρωθεί.



Προτεινόμενη λύση.



Α. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΔΒ θα έχουμε:$Β\Delta^2 = AB^2 + A\Delta^2 = 24^2 + 7^2 \Leftrightarrow$ $B\Delta^2 = 625 \Leftrightarrow B\Delta = 25m.$

Άρα $KB = KT = K\Delta = K\Sigma = 12{,}5m.$

$\Theta H = EZ = P\Lambda + \Lambda K + KT = 3.5 + 12 + 12.5 = 28m$

$E\Theta = ZH = \Sigma K + KM + MN = 12.5 + 3.5 + 12 = 28m$

Από τις δύο τελευταίες ισότητες προκύπτει ότι η περίμετρος της περίφραξης είναι:

$$\Pi_{EZH\Theta} = 4 \cdot 28 = 112m.$$

Β. Φέρουμε από το σημείο $\Gamma I \perp EZ \ \ \kappa\alpha\iota\ \Gamma\Pi \perp E\Theta$, άρα το $\Pi\Gamma IE$ είναι ορθογώνιο.

Το εμβαδόν του μέρους του τριγώνου ΕΒΔ που θα πλακοστρωθεί είναι:

$E_{\sigma\kappa} = (\Pi\Gamma IE) - (E\Pi\Delta) - (EIB) - (AB\Gamma\Delta) =$

$$= 19 \times 27.5 - \frac{1}{2} \times 19 \times 3.5 - \frac{1}{2} \times 12 \times 27.5 - 24 \times 7 =$$

$$= 522.5 - 33.25 - 165 - 168 = 156.25\ m^2$$

	ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ ***ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΚΥΤΑΛΟΔΡΟΜΙΑ 2011*** ***ΓΙΑ ΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ*** ***Τρίτη 1 Φεβρουαρίου 2011 – ΛΕΜΕΣΟΣ*** ***Τάξη: Α΄ Γυμνασίου***

ΣΧΟΛΕΙΟ…………………………………………………………………..

Ώρα έναρξης 10:15	Ώρα λήξης 10:30	Ώρα παράδοσης

<u>ΠΡΟΒΛΗΜΑ</u>

Να αλλάξετε τη σειρά τοποθέτησης των αριθμών 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 έτσι ώστε δύο οποιοιδήποτε διπλανοί αριθμοί να έχουν άθροισμα τέλειο τετράγωνο.

<u>ΛΥΣΗ</u>

8, 1, 15, 10, 6, 3, 13, 12, 4, 5, 11, 14, 2, 7, 9, 16

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΚΥΤΑΛΟΔΡΟΜΙΑ 2010
ΓΙΑ ΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ
Τρίτη 1 Φεβρουαρίου 2011 – ΛΕΜΕΣΟΣ
Τάξη: Β΄ Γυμνασίου

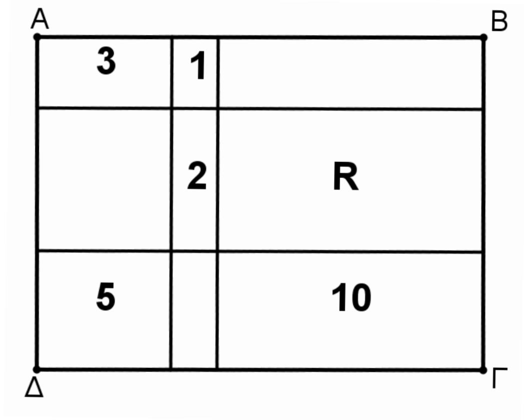
ΣΧΟΛΕΙΟ………………………………………………………………..

Ώρα έναρξης	Ώρα λήξης 11:00	Ώρα παράδοσης

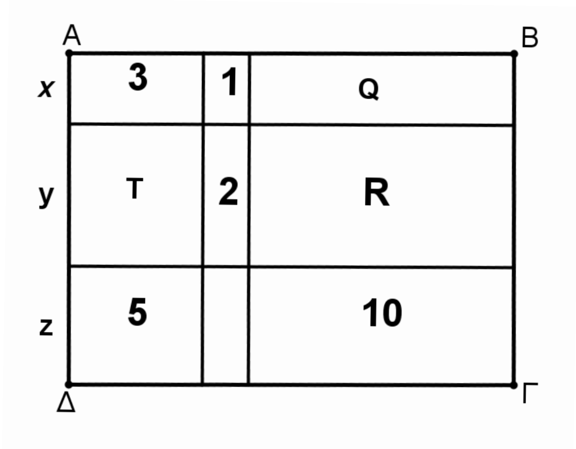
ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Στο διπλανό σχήμα, το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ χωρίζεται σε εννέα πιο μικρά ορθογώνια παραλληλόγραμμα. Ο αριθμός που βρίσκεται μέσα σε κάθε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο δηλώνει το εμβαδόν του.

Να βρείτε: (α) τον αριθμό R.
(β) το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.



ΛΥΣΗ



(α) Είναι $\frac{x}{y}=\frac{1}{2},\ \frac{y}{z}=\frac{R}{10},\ \frac{z}{x}=\frac{5}{3}$. Άρα $1=\frac{5R}{60}\Leftrightarrow R=12$.

(β) $\frac{3}{T}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow T=6$

$\frac{Q}{10}=\frac{3}{5}\Leftrightarrow Q=6$

$\frac{1}{S}=\frac{3}{5}\Leftrightarrow S=\frac{5}{3}$ και άρα

$$\left(\text{ΑΒΓΔ}\right)=21+12+6+6+\frac{5}{3}=46+\frac{2}{3}=\frac{140}{3}$$

	ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ ***ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΚΥΤΑΛΟΔΡΟΜΙΑ 2011*** ***ΓΙΑ ΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ*** ***Τρίτη 1 Φεβρουαρίου 2011 – ΛΕΜΕΣΟΣ*** ***Τάξη: Γ΄ Γυμνασίου***

ΣΧΟΛΕΙΟ…………………………………………………………………..

Ώρα έναρξης	Ώρα λήξης 11:45	Ώρα παράδοσης

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

(α) Σήμερα, 1η Φεβρουαρίου 2011 είναι μέρα Τρίτη. Τι μέρα θα είναι η 2η Μαρτίου 2012; (προσέξτε πως το έτος 2012 είναι δίσεκτο!)

(β) Για το έτος *N* η 300η μέρα του ήταν Τρίτη.
Για το έτος *N+1* η 200η μέρα του ήταν επίσης Τρίτη.
Να βρείτε το όνομα της μέρας της εβδομάδας, που αντιστοιχεί στην 100η μέρα του έτους *N-1*.

ΛΥΣΗ

(α) 1η Φεβρουαρίου 2011– 31η Ιανουαρίου 2012 :364 μέρες (δεν συμπεριλαμβάνεται η 1η Φεβρουαρίου)
1η Φεβρουαρίου 2012 – 29η Φεβρουαρίου 2012: 29 μέρες
1η Μαρτίου 2012 – 2η Μαρτίου 2012 : 2 μέρες
Σύνολο:395 μέρες.

Όμως, $395 = 56 \cdot 7 + 3$, που σημαίνει ότι η 2η Μαρτίου 2012 θα είναι 56 εβδομάδες και 3 ημέρες μετά την Τρίτη 1η Φεβρουαρίου 2011, δηλαδή Παρασκευή.

(β) Συμβολίζουμε με: *Α* την ημέρα που αντιστοιχεί στην 300η μέρα του έτους *Ν*
Β την ημέρα που αντιστοιχεί στην 200η μέρα του έτους *Ν*+1
Γ την ημέρα που αντιστοιχεί στην 100η μέρα του έτους *Ν*-1

Αν το έτος *Ν* **<u>δεν είναι δίσεκτο</u>**, η μέρα *Β* είναι $\left(365-300\right)+200=265$ μέρες μετά από τη μέρα *Α*. Αλλά $265 = 37 \cdot 7 + 6$. Άρα η μέρα *Β* βρίσκεται 37 εβδομάδες και 6 μέρες μετά την μέρα *Α*, δηλαδή θα έπρεπε να είναι Δευτέρα, που είναι άτοπο.

Επομένως το έτος *Ν* είναι δίσεκτο, άρα το *Ν*-1δεν είναι δίσεκτο. Με αυτό το δεδομένο, η μέρα *Α* βρίσκεται $\left(365-100\right)+300=565$ μέρες μετά από τη μέρα *Γ*. Αλλά $565 = 80 \cdot 7 + 5$, δηλαδή η μέρα *Α* βρίσκεται 80 εβδομάδες και 5 μέρες μετά τη μέρα *Γ* και έτσι η μέρα *Γ* είναι Πέμπτη.

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΚΥΤΑΛΟΔΡΟΜΙΑ 2012

ΓΙΑ ΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ

Τρίτη 31 Ιανουαρίου 2012 – ΛΕΥΚΩΣΙΑ

Τάξη: Α΄ Γυμνασίου

ΣΧΟΛΕΙΟ……………………………………………………………………..

Ώρα έναρξης 10:15	Ώρα λήξης 10:30	Ώρα παράδοσης

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Να βρείτε όλους τους διψήφιους θετικούς ακεραίους αριθμούς, που έχουν την ιδιότητα: «αν από τον διψήφιο αριθμό αφαιρέσουμε το γινόμενο των ψηφίων του, βρίσκουμε αποτέλεσμα 16».
(Να δικαιολογήσετε και να επεξηγήσετε πλήρως την απάντηση σας).

Προτεινόμενη λύση:

Έστω ότι ο αριθμός μας είναι:

$$\overline{xy} = 10x + y$$

Τότε από την δεδομένη ιδιότητα έχουμε:

$$10x + y - xy = 16 \Leftrightarrow 10x - 10 + y(1 - x) = 6 \Leftrightarrow 10(x - 1) - y(x - 1) = 6$$

$$\Leftrightarrow (10 - y)(x - 1) = 6 \Leftrightarrow x - 1 = \frac{6}{10 - y}$$

Από την τελευταία εξίσωση έχουμε τις περιπτώσεις :

- $10 - y = 1 \Rightarrow y = 9 \; και \; άρα \; x = 7$
- $10 - y = 2 \Rightarrow y = 8 \; και \; άρα \; x = 4$
- $10 - y = 3 \Rightarrow y = 7 \; και \; άρα \; x = 3$
- $10 - y = 6 \Rightarrow y = 4 \; και \; άρα \; x = 2$

Επομένως οι μόνοι διψήφιοι θετικοί ακέραιοι με την δεδομένη ιδιότητα είναι οι

$$79, 48, 37, 24.$$

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΚΥΤΑΛΟΔΡΟΜΙΑ 2012
ΓΙΑ ΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ
Τρίτη 31 Ιανουαρίου 2012 – ΛΕΥΚΩΣΙΑ
Τάξη: Β΄ Γυμνασίου

ΣΧΟΛΕΙΟ……………………………………………………………………..

Ώρα έναρξης	Ώρα λήξης 11:00	Ώρα παράδοσης

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Σε ένα τερματικό σταθμό φυσικού αερίου μια δεξαμενή μπορεί να γεμίσει με υγροποιημένο φυσικό αέριο σε 12 μέρες , αν δέχεται αέριο από δύο παροχές Α και Β.
Όταν η δεξαμενή είναι τελείως άδεια, ο διαχειριστής ανοίγει και τις δύο παροχές για 2 μέρες. Στην συνέχεια η παροχή Α σταματά και η τροφοδότηση γίνεται μόνο από την παροχή Β, μέχρι να γεμίσει πλήρως η δεξαμενή. Αν ξέρουμε ότι η δυναμικότητα της παροχής Β είναι τα $\frac{2}{3}$ της δυναμικότητας της παροχής Α, να βρείτε σε πόσες μέρες συνολικά θα γεμίσει η δεξαμενή.
(Να δικαιολογήσετε και να επεξηγήσετε πλήρως την απάντηση σας).

<u>Προτεινόμενη λύση:</u>

Η συνολική δυναμικότητα των δύο παροχών είναι:

$$A + B = \frac{3}{3} + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

Αν είχαμε παροχή αερίου και από τις δύο παροχές θα γέμιζε η δεξαμενή σε 12 μέρες, δηλαδή για κάθε μέρα οι $A + B$ θα γέμιζαν το $\frac{1}{12}$ της δεξαμενής.
Άρα για 2 μέρες που παρέχουν αέριο και οι δύο παροχές, θα γεμίσουν το $\frac{1}{6}$ της δεξαμενής.
Επομένως έχουμε

Μέρες	***Δυναμικότητα παροχής***
10	$\frac{5}{3}$
x	$\frac{2}{3}$

Τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα και άρα παίρνουμε:

$$\frac{10}{x} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}} \Leftrightarrow \frac{10}{x} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow 2x = 50 \Leftrightarrow x = 25$$

Δηλαδή η δεξαμενή θα γεμίσει σε 25+2=27 μέρες συνολικά.

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΚΥΤΑΛΟΔΡΟΜΙΑ 2012

ΓΙΑ ΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ

Τρίτη 31 Ιανουαρίου 2012 – ΛΕΥΚΩΣΙΑ

Τάξη: Γ΄ Γυμνασίου

ΣΧΟΛΕΙΟ……………………………………………………………………..

Ώρα έναρξης	Ώρα λήξης 11:45	Ώρα παράδοσης

<u>ΠΡΟΒΛΗΜΑ</u>

Δέκα τενίστες συμμετέχουν σε ένα τουρνουά τένις , όπου ο κάθε τενίστας αγωνίζεται μια φορά με κάθε ένα από τους υπόλοιπους τενίστες . Ο τενίστας i κερδίζει x_i φορές και χάνει y_i φορές με $i = 1,2,3, \dots ,10$ (Κανένας αγώνας τένις δεν λήγει ισόπαλος).

Να αποδείξετε ότι:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{10}^2 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{10}^2$$

(Να δικαιολογήσετε και να επεξηγήσετε πλήρως την απάντηση σας).

<u>Προτεινόμενη λύση:</u>

Ισχύει από τα δεδομένα του προβλήματος

$$x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = \cdots = x_{10} + y_{10} = 9$$

Και αφού ο αριθμός των κερδισμένων παιχνιδιών από όλους τους τενίστες ισούται με τον αριθμό των χαμένων παιχνιδιών θα έχουμε

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{10} = y_1 + y_2 + \cdots + y_{10}$$

Αρά η δεδομένη προς απόδειξη σχέση γράφεται:

$$x_1^2 - y_1^2 + x_2^2 - y_2^2 + \cdots + x_{10}^2 - y_{10}^2 = (x_1 - y_1)(x_1 + y_1) + \cdots + (x_{10} - y_{10})(x_{10} + y_{10}) =$$
$$9[(x_1 + x_2 + \cdots + x_{10}) - (y_1 + y_2 + \cdots + y_{10})] = 0.$$

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΚΥΤΑΛΟΔΡΟΜΙΑ 2013

ΓΙΑ ΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ

Πέμπτη 31 Ιανουαρίου 2013 – ΛΕΥΚΩΣΙΑ

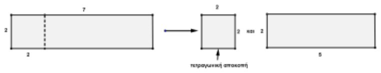
Τάξη: Α΄ Γυμνασίου

ΣΧΟΛΕΙΟ…………………………………………………………………..

Ώρα έναρξης 10:15	Ώρα λήξης 10:30	Ώρα παράδοσης

<u>ΠΡΟΒΛΗΜΑ</u>

Δίνεται ένα ορθογώνιο. Μια «***τετραγωνική αποκοπή***» θα ονομάζεται η αποκοπή από το ορθογώνιο, ενός τετραγώνου με πλευρά την <u>μικρότερη</u> πλευρά του ορθογωνίου. Για παράδειγμα αν έχουμε ένα ορθογώνιο 2×7 μια «***τετραγωνική αποκοπή***» είναι ένα τετράγωνο 2×2.(Δείτε το σχήμα παρακάτω.)



Σας δίνεται ένα ορθογώνιο με διαστάσεις 2013×26. Αρχίζετε να σχηματίζετε «***τετραγωνικές αποκοπές***» με πρώτη ένα τετράγωνο 26×26, δεύτερη «***τετραγωνική αποκοπή***» το επόμενο τετράγωνο με πλευρά τη μικρότερη διάσταση του ορθογωνίου που απόμεινε από την πρώτη αποκοπή, τρίτη «***τετραγωνική αποκοπή***» το άλλο τετράγωνο με πλευρά την μικρότερη διάσταση του νέου ορθογωνίου που απόμεινε και ούτω καθεξής μέχρι που το τελευταίο ορθογώνιο που απομένει να είναι τετράγωνο και θα είναι η τελευταία «***τετραγωνική αποκοπή***». Να υπολογίσετε το πλήθος των «***τετραγωνικών αποκοπών***» που προκύπτουν από αυτή την διαδικασία.

<u>Προτεινόμενη λύση:</u>

Χρησιμοποιώντας την Ευκλείδεια διαίρεση έχουμε διαδοχικά:

$$2013 = \mathbf{77} \cdot 26 + 11$$
$$26 = \mathbf{2} \cdot 11 + 4$$
$$11 = \mathbf{2} \cdot 4 + 3$$
$$4 = \mathbf{1} \cdot 3 + 1$$
$$3 = \mathbf{3} \cdot 1$$

Άρα ο συνολικός αριθμός των «***τετραγωνικών αποκοπών***» που προκύπτουν από αυτή την διαδικασία είναι:

$$77 + 2 + 2 + 1 + 3 = 85.$$

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΚΥΤΑΛΟΔΡΟΜΙΑ 2013
ΓΙΑ ΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ
Πέμπτη 31 Ιανουαρίου 2013 – ΛΕΥΚΩΣΙΑ
Τάξη: Β΄ Γυμνασίου

ΣΧΟΛΕΙΟ……………………………………………………………………..

Ώρα έναρξης	Ώρα λήξης 11:00	Ώρα παράδοσης

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

(α) Ο Γιώργος αγόρασε στις 2 Ιανουαρίου 2013 ένα ipad πληρώνοντας μαζί με το ΦΠΑ που ήταν 17% συνολικά € 585. Να βρείτε πόσο θα πληρώσει ο Κώστας για το ίδιο ipad αν το αγοράσει στις 2 Φεβρουαρίου που το ΦΠΑ θα είναι 18%.

(β) Ένας χρυσοχόος κατασκευάζει δαχτυλίδια που το καθένα έχει μάζα 9 gr χρυσού. Κατά την κατασκευή του δαχτυλιδιού επιτρέπεται η μάζα του χρυσού να είναι περισσότερη ή λιγότερη από 9 gr κατά ένα ποσοστό που δεν ξεπερνά το 2%. Ο χρυσοχόος έχει κατασκευάσει δαχτυλίδια αυτού του τύπου που έχουν συνολική μάζα χρυσού 1000 gr. Να βρείτε την διαφορά μεταξύ του μέγιστου δυνατού και του ελάχιστου δυνατού αριθμού αυτών των δαχτυλιδιών που θα δώσουν την συνολική μάζα των 1000 gr χρυσού.

Προτεινόμενη λύση:

(α) Ο Κώστας θα πληρώσει:

$$\frac{118}{117}\cdot 585 = € 590.$$

Ή διαφορετικά

Το κόστος του ipad είναι:

$$\frac{100}{117}\cdot 585 = € 500$$

Επομένως ο Κώστας θα πληρώσει

$$\frac{500\cdot 118}{100} = € 590.$$

(β) Μέγιστη μάζα ενός δακτυλιδιού είναι: $9 + 9\cdot\frac{2}{100} = 9{,}18$

Αν όλα τα δακτυλίδια είχαν την μέγιστη μάζα τότε το πλήθος των δακτυλιδιών θα ήταν περίπου

$$1000 \div 9{,}18 = 108{,}93\ \ldots$$

Ο αριθμός αυτός πρέπει να είναι ακέραιος και αφού δεν είναι δυνατόν να έχουμε δακτυλίδια με μεγαλύτερη μάζα από 9,18 θα πρέπει κάποια από τα δακτυλίδια να έχουν μάζα πιο κάτω από αυτήν και κατά συνέπεια ο ελάχιστος αριθμός δακτυλιδιών που θα μπορούν να προκύψουν

είναι 109.

Ελάχιστη μάζα ενός δακτυλιδιού είναι:

$$9 - 9\cdot\frac{2}{100} = 8{,}82$$

Αν όλα τα δακτυλίδια είχαν την ελάχιστη μάζα τότε το πλήθος των δακτυλιδιών θα ήταν περίπου

$$1000 \div 8{,}82 = 113{,}37\ \ldots$$

Ο αριθμός αυτός πρέπει να είναι ακέραιος και αφού δεν είναι δυνατόν να έχουμε δακτυλίδια με μικρότερη μάζα από 8,82 θα πρέπει κάποια από τα δακτυλίδια να έχουν μάζα πιο πάνω από αυτήν και κατά συνέπεια ο μέγιστος αριθμός δακτυλιδιών που θα μπορούν να προκύψουν

είναι 113

Κατά συνέπεια το ζητούμενο είναι: $\mathbf{113 - 109 = 4.}$

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΚΥΤΑΛΟΔΡΟΜΙΑ 2013

ΓΙΑ ΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ

Πέμπτη 31 Ιανουαρίου 2013 – ΛΕΥΚΩΣΙΑ

Τάξη: Γ΄ Γυμνασίου

ΣΧΟΛΕΙΟ………………………………………………………………..

Ώρα έναρξης	Ώρα λήξης 11:45	Ώρα παράδοσης

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

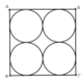
(α) Στο εσωτερικό ενός τετραγώνου με πλευρά 8 cm τοποθετούνται 4 κύκλοι με ακτίνα $2cm$ ο καθένας τέτοιοι ώστε να εφάπτονται μεταξύ τους και με τις πλευρές του τετραγώνου. Να βρείτε το εμβαδόν του μέρους του τετραγώνου που δεν καλύπτεται από τους κύκλους (μπορείτε να βρείτε την απάντησή σας και συναρτήσει του π.)

(β) Ένα ισόπλευρο τρίγωνο έχει πλευρά 5 m. Σας δίνονται σε **απεριόριστο** αριθμό ίσοι κύκλοι με ακτίνα 1 m που μπορούν να τοποθετηθούν μέσα στο τρίγωνο. Οι κύκλοι μπορεί να επικαλύπτουν ο ένας τον άλλο αλλά πρέπει να παραμένουν ολόκληροι μέσα στο τρίγωνο (ή στην πιο ακραία περίπτωση να είναι εφαπτόμενοι των πλευρών του και να είναι μέσα στο τρίγωνο). Να βρείτε το μέγιστο εμβαδόν που μπορεί να καλυφθεί από τους κύκλους αυτούς.

Προτεινόμενη λύση:

(α) Έστω E το εμβαδόν του τετραγώνου που δεν καλύπτεται από τους κύκλους. Τότε έχουμε:

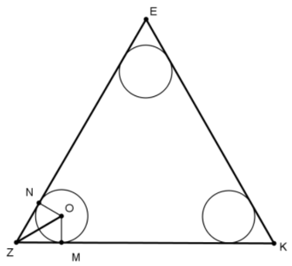
$$E = 8^2 - 4\pi 2^2 = 64 - 16\pi\ cm^2.$$



(β) Το μέρος του τριγώνου που δεν μπορεί να καλυφθεί με τους κύκλους είναι οι τρεις «γωνίες» όπως φαίνεται στο σχήμα

Άρα αν ονομάσουμε E_1 το εμβαδόν «γωνίας» που δεν καλύπτεται, για το εμβαδόν της έχουμε:

$$E_1 = 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot 1 - \frac{\pi}{3}\ \ cm^2.$$



Επομένως το μέγιστο εμβαδόν του τριγώνου που μπορεί να καλυφθεί είναι:

$$E_{\mu\varepsilon\gamma.} = \frac{25\sqrt{3}}{4} - 3\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{13\sqrt{3} + 4\pi}{4}\ cm^2.$$

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΚΥΤΑΛΟΔΡΟΜΙΑ 2014
ΓΙΑ ΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ
Παρασκευή 31 Ιανουαρίου 2014 – ΛΕΥΚΩΣΙΑ
Τάξη: Α΄ Γυμνασίου

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Ο αρχιμάγειρας ενός εστιατορίου έχει δύο βοηθούς μαγείρους τον Κώστα και τον Γιώργο. Επειδή μέσα στην κουζίνα του εστιατορίου δεν υπάρχουν ρολόγια για να μετρούν τον χρόνο που χρειάζεται για το βράσιμο διάφορων φαγητών, ο αρχιμάγειρας δίνει στους βοηθούς του από δύο κλεψύδρες στον καθένα που η μία μετρά, μέχρι να αδειάσει τελείως, χρόνο 9 min και η άλλη χρόνο 13 min και τους θέτει το εξής πρόβλημα: *«Θέλω, χρησιμοποιώντας τις δύο κλεψύδρες σας ο καθένας, να μετρήσετε* ***ακριβώς*** *τον χρόνο που πρέπει να βράσουν δύο διαφορετικά φαγητά για να είναι επιτυχημένα στην γεύση τους. Ο Κώστας θα πρέπει να βράσει το φαγητό Α για* ***ακριβώς*** $35\ min$ *και ο Γιώργος το φαγητό Β για* ***ακριβώς*** $17\ min$. *Το βράσιμο των φαγητών είναι δυνατόν να ξεκινήσει οποιαδήποτε στιγμή θέλετε και δεν πρέπει να διακοπεί μέχρι να τελειώσει ο απαιτούμενος χρόνος ».*
Να γράψετε αναλυτικά την διαδικασία που πρέπει να ακολουθήσουν ο Κώστας και ο Γιώργος, χρησιμοποιώντας τις δύο κλεψύδρες τους, για να λύσουν το πρόβλημα που τους έθεσε ο αρχιμάγειρας.
Σημείωση: Ο καθένας δικαιούται να χρησιμοποιήσει μόνο τις δικές του κλεψύδρες και δεν δικαιούνται να κάμουν ανταλλαγές δίνοντας ο ένας στον άλλο.

ΛΥΣΗ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ

Κώστας: Για να μετρήσει τον χρόνο των $35\ min$ για το φαγητό Α, θα κάνει τα εξής όταν ξεκινήσει το βράσιμο :

- Γυρίζει την κλεψύδρα των 13 min μέχρι να αδειάσει πλήρως και αμέσως την ξαναγυρίζει μέχρι να αδειάσει ξανά πλήρως και μέχρι τώρα επομένως έχει μετρήσει χρόνο $13 + 13 = 26$ min .
- Στην συνέχεια γυρίζει την κλεψύδρα των $9\ min$ μέχρι να αδειάσει τελείως και έχει έτσι μετρήσει συνολικό χρόνο $26 + 9 = 35\ min$

Γιώργος: Για να μετρήσει τον χρόνο των $17\ min$ για το φαγητό Β θα πρέπει να μην ξεκινήσει το βράσιμο του φαγητού αμέσως αλλά αφού πρώτα δημιουργήσει χρόνο $4\ min$. Θα κάνει τα εξής βήματα:

- Γυρίζει τις κλεψύδρες ταυτόχρονα και μόλις αδειάσει τελείως εκείνη των $9\ min$, η κλεψύδρα των 13 min έχει ακόμη χρόνο $4 min$.
- Ξεκινούμε εκείνη την στιγμή το βράσιμο του φαγητού.
- Μόλις τελειώσουν τα $4\ min$ την γυρίζουμε ξανά μέχρι να αδειάσει πάλι τελείως. Άρα έχουμε μετρήσει χρόνο βρασίματος ακριβώς $4 + 13 = 17\ min$.

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΚΥΤΑΛΟΔΡΟΜΙΑ 2014

ΓΙΑ ΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ

Παρασκευή 31 Ιανουαρίου 2014 – ΛΕΥΚΩΣΙΑ

Τάξη: Β΄ Γυμνασίου

<u>ΠΡΟΒΛΗΜΑ</u>

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένα τετράγωνο διαστάσεων 7×7 που μέσα στα μοναδιαία του μικρά 1×1 τετράγωνα είναι σημειωμένοι οι αριθμοί από το 1 έως 49 με αύξουσα σειρά. Ονομάζουμε ένα τετράγωνο του μεγάλου τετραγώνου ***περιττό,*** αν το άθροισμα των αριθμών που βρίσκονται μέσα σε αυτό είναι ***περιττός*** αριθμός.

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

<u>Παραδείγματα</u>:

α) Το αρχικό μεγάλο τετράγωνο είναι ***περιττό*** γιατί το άθροισμα όλων των αριθμών από το 1 έως και το 49 είναι 1225 .

β) Το διπλανό 3×3 τετράγωνο είναι ***περιττό*** γιατί
$1+2+3+8+9+10+15+16+17=81$
που είναι περιττός αριθμός.

1	2	3
8	9	10
15	16	17

Να υπολογίσετε το πλήθος όλων των ***περιττών*** τετραγώνων που υπάρχουν στο αρχικό σχήμα.

<u>ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ</u>

Παρατηρούμε τα ακόλουθα:

(α) Το άθροισμα περιττού πλήθους περιττών είναι περιττός και το άθροισμα αρτίου πλήθους περιττών είναι άρτιος ενώ το άθροισμα οσονδήποτε αρτίων είναι άρτιος.

(β) Αν ένα τετράγωνο έχει πλευρά που είναι άρτιος αριθμός τότε περιλαμβάνει άρτιο αριθμό κελιών. Εφόσον δε οι περιττοί και οι άρτιοι αριθμοί είναι τοποθετημένοι στα κελιά εναλλάξ θα περιέχει ένα άρτιο πλήθος από περιττούς αριθμούς και κατά συνέπεια το άθροισμα των αριθμών που περιέχονται σε αυτό θα είναι άρτιος. Ώστε ένα τέτοιο τετράγωνο δεν είναι ***«περιττό».***

(γ) Αν τώρα ένα τετράγωνο έχει πλευρά που είναι περιττός αριθμός τότε διακρίνουμε τις ακόλουθες υποπεριπτώσεις:

$(\boldsymbol{\gamma_1})$ Το κελί που είναι στην αριστερή και πάνω γωνία περιέχει άρτιο αριθμό. Τότε το τετράγωνο αυτό περιέχει άρτιο πλήθος από περιττούς αριθμούς και κατά συνέπεια το άθροισμα των αριθμών που περιέχει είναι άρτιος αριθμός. Ώστε ένα τέτοιο τετράγωνο δεν είναι ***«περιττό».***

$(\boldsymbol{\gamma_2})$ Το κελί που είναι στην αριστερή και πάνω γωνία περιέχει περιττό αριθμό. Τότε το τετράγωνο αυτό περιέχει περιττό πλήθος από περιττούς αριθμούς και κατά συνέπεια το άθροισμα των αριθμών που περιέχει είναι περιττός αριθμός. Ώστε ένα τέτοιο τετράγωνο είναι ***«περιττό».***

(δ) Ενόψει των ***(β)*** και ***(γ)*** φαίνεται ότι το πλήθος των ***«περιττών»*** τετραγώνων συμπίπτει με το πλήθος των τετραγώνων που έχουν πλευρά με περιττό μήκος και στην αριστερή και πάνω γωνία περιέχουν περιττό αριθμό.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι με αυτή την ιδιότητα έχουμε:

Ένα 7×7 τετράγωνο (με το 1 στην αριστερή και πάνω γωνία).

Πέντε 5×5 τετράγωνα (με τα 1,3,9,15 και 17 στην αριστερή και πάνω γωνία).

Δέκα τρία 3×3 τετράγωνα (με τα $1, 3, 5$,9,11,15,17, $19, 23, 25, 29, 31$ και 33 στην αριστερή και πάνω γωνία).

Είκοσι πέντε 1×1 τετράγωνα (όσοι και οι περιττοί αριθμοί $1, 3, 5, \ldots$,49, όντας τα τετράγωνα που συμπίπτουν με τα κελιά).

Κατά συνέπεια το σύνολο των «περιττών» τετραγώνων είναι

$$1+5+13+25=44.$$

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΚΥΤΑΛΟΔΡΟΜΙΑ 2014

ΓΙΑ ΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ

Παρασκευή 31 Ιανουαρίου 2014 – ΛΕΥΚΩΣΙΑ

Τάξη: Γ΄ Γυμνασίου

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Ο κύριος Μάριος είναι συνταξιούχος Μαθηματικός και έχει τρία παιδιά, τον Σάββα, τον Ανδρέα και την Μαρία. Για τις ηλικίες των παιδιών του παρατήρησε τα εξής:

- Η Μαρία είναι το μεσαίο παιδί και η μητέρα της φρόντιζε κάθε φορά στην επέτειο των γενεθλίων της να της έχει μια τούρτα με τόσα κεράκια όσα ήταν η ηλικία της εκείνη την χρονιά. Ο κύριος Μάριος θυμάται, ότι η Μαρία, από όλα μαζί τα κεράκια που τοποθετήθηκαν στις τούρτες των τριών πρώτων επετείων των γενεθλίων της, κατάφερε να σβήσει με το πρώτο φύσημα, συνολικά το 50% των κεριών. Από την 4η επέτειο μέχρι και την τελευταία που ήταν χθες, καταφέρνει να σβήνει όλα τα κεράκια της τούρτας της με ένα φύσημα. Μέχρι σήμερα έχει σβήσει συνολικά 900 κεράκια.
- Η σημερινή ηλικία του Σάββα είναι μεταξύ 30 και 40 χρονών, του Ανδρέα μεταξύ 40 και 50 χρονών και το γινόμενο των ηλικιών τους είναι τέλειος κύβος θετικού ακεραίου.(*Για παράδειγμα το 64 είναι τέλειος κύβος γιατί* $4^3 = 64$*)*

Να βρείτε τις σημερινές ηλικίες των παιδιών του κυρίου Μάριου.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ

- Για την Μαρία έχουμε ότι τα τρία πρώτα χρόνια των γενεθλίων της έσβησε $(1+2+3)\frac{50}{100} = 3$ κεράκια. Επομένως μέχρι τα σημερινά της γενέθλια θα έχουμε:

$$3+4+5+\cdots+\nu = 900 \Leftrightarrow \frac{(\nu+3)(\nu-2)}{2} = 900 \Leftrightarrow \nu^2+\nu-1806 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\nu+43)(\nu-42) = 0 \Leftrightarrow \nu = 42.$$

Άρα, η Μαρία είναι 42 χρονών σήμερα.

- Ας ονομάσουμε x την ηλικία του Ανδρέα. Τότε η ηλικία του Σάββα θα είναι ένας αριθμός από το σύνολο $\mathcal{M} = \{31,32,33,34,35,36,37,38,39\}$.Επειδή το γινόμενο των ηλικιών των δύο αδερφών είναι τέλειος κύβος θετικού ακεραίου, δεν μπορεί οι ηλικίες τους να είναι πρώτοι αριθμοί, άρα $x \neq 41,43,47$ και $\mathcal{M} = \{32,33,34,35,36,38,39\}$. Αναλύουμε τις πιθανές ηλικίες του Ανδρέα σε γινόμενο πρώτων αριθμών και έχουμε:

$$42 = 2\cdot 3\cdot 7, \quad 44 = 2^2\cdot 11, \quad 45 = 3^2\cdot 5, \quad 46 = 2\cdot 23,$$
$$48 = 2^4\cdot 3, \quad 49 = 7^2$$

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- $32\cdot x = k^3, k\in\mathbb{N}$, άρα $2^5\cdot x = k^3$, δηλαδή πρέπει $x = 2\rho^3, \rho\in\mathbb{N}$. Όμως από την παραπάνω ανάλυση δεν υπάρχει τέτοιος αριθμός .
- $33\cdot x = k^3, k\in\mathbb{N}$, άρα $3\cdot 11\cdot x = k^3$,δηλαδή πρέπει $x = 3^2 11^2\rho^3, \rho\in\mathbb{N}$. Όμως από την παραπάνω ανάλυση δεν υπάρχει τέτοιος αριθμός .
- $34\cdot x = k^3, k\in\mathbb{N}$, άρα $2\cdot 17\cdot x = k^3$,δηλαδή πρέπει $x = 2^2 17^2\rho^3, \rho\in\mathbb{N}$. Όμως από την παραπάνω ανάλυση δεν υπάρχει τέτοιος αριθμός.
- $35\cdot x = k^3, k\in\mathbb{N}$, άρα $5\cdot 7\cdot x = k^3$,δηλαδή πρέπει $x = 5^2 7^2\rho^3, \rho\in\mathbb{N}$. Όμως από την παραπάνω ανάλυση δεν υπάρχει τέτοιος αριθμός .
- $36\cdot x = k^3, k\in\mathbb{N}$, άρα $3^2\cdot 2^2\cdot x = k^3$,δηλαδή πρέπει $x = 3\cdot 2\rho^3, \rho\in\mathbb{N}$. Η μόνη δυνατή περίπτωση είναι $x = 2^4\cdot 3$, δηλαδή $36\cdot 48 = 3^2\cdot 2^2\cdot 2^4\cdot 3 = 3^3\cdot(2^2)^3$.
- $38\cdot x = k^3, k\in\mathbb{N}$, άρα $3\cdot 11\cdot x = k^3$,δηλαδή πρέπει $x = 3^2\cdot 11^2\rho^3, \rho\in\mathbb{N}$. Όμως από την παραπάνω ανάλυση δεν υπάρχει τέτοιος αριθμός.
- $39\cdot x = k^3, k\in\mathbb{N}$, άρα $3\cdot 13\cdot x = k^3$,δηλαδή πρέπει $x = 3^2\cdot 13^2\rho^3, \rho\in\mathbb{N}$. Όμως από την παραπάνω ανάλυση δεν υπάρχει τέτοιος αριθμός.

	ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ ***ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΚΥΤΑΛΟΔΡΟΜΙΑ 2015*** ***ΓΙΑ ΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ*** ***Τετάρτη 28 Ιανουαρίου 2015 – ΛΕΥΚΩΣΙΑ*** ***Τάξη: Α΄ Γυμνασίου***

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Σε ένα τουρνουά βόλεϊ δήλωσαν συμμετοχή 18 ομάδες Γυμνασίων της Κύπρου. Σε κάθε Γυμνάσιο δόθηκε τυχαία ένας αριθμός από το 1 έως και το 18 και καταρτίστηκε ο πιο κάτω πίνακας:

1	Περιφερειακό Γυμνάσιο Λευκάρων	**10**	Γυμνάσιο Πόλεως Χρυσοχούς
2	Γυμνάσιο Αγίου Δομετίου	**11**	Γυμνάσιο Βεργίνας
3	Γυμνάσιο Ακροπόλεως	**12**	Γυμνάσιο Αγρού
4	Γυμνάσιο Παραλιμνίου	**13**	Γυμνάσιο Μακεδονίτισσας
5	Γυμνάσιο Κοκκινοτριμιθιάς	**14**	Γυμνάσιο Γεροσκήπου
6	Γυμνάσιο Αγίου Ιωάννη	**15**	Λανίτειο Γυμνάσιο
7	Γυμνάσιο Αποστόλου Παύλου	**16**	Γυμνάσιο Δροσιάς
8	Γυμνάσιο Αραδίππου	**17**	Νικολαείδιο Γυμνάσιο
9	Γυμνάσιο Αγίου Αθανασίου	**18**	Γυμνάσιο Ακακίου

Αποφασίστηκε όπως οι αγώνες της 1ης φάσης του τουρνουά καθοριστούν έτσι ώστε, κάθε σχολείο να παίξει με ένα άλλο σχολείο με τον εξής τρόπο:

«*Το άθροισμα των αριθμών που δόθηκαν στα δύο σχολεία να είναι τέλειο τετράγωνο»*.

Να βρείτε και να καταγράψετε το πρόγραμμα της 1ης φάσης των συναντήσεων.

Σημείωση: Ένας αριθμός είναι τέλειο τετράγωνο αν είναι της μορφής α^2, όπου α θετικός ακέραιος αριθμός. Για παράδειγμα το 36 είναι τέλειο τετράγωνο γιατί $6^2 = 36$.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ

Θα δούμε πρώτα όλα τα ζευγάρια (x, y) των αριθμών με $x, y \in \{1,2, \dots ,18\}$ τέτοια ώστε $x + y = \alpha^2$, όπου α θετικός ακέραιος αριθμός. Αυτά είναι:

$(1,3), (1,8), (1,15)$ $(2,7), (2,14)$, $(3,1), (3,6), (3,13)$, $(4,5), (4,12)$, $(5,4), (5,11)$, $(6,3), (6,10)$ $(7,2), (7,9), (7,18)$ $(8,1), (8,17)$ $(9,7), (9,16)$	$(10,6), (10,15)$ $(11,5), (11,14)$ $(12,4), (12,13)$ $(13,3), (13,12)$ $(14,2), (14,11)$ $(15,1), (15,10)$ $(16,9)$ $(17,8)$ $(18,7)$

Επομένως υποχρεωτικά θα έχουμε τις συναντήσεις:

$(16,9) \longrightarrow$ Γυμνάσιο Δροσιάς- Γυμνάσιο Αγίου Αθανασίου

$(17,8) \longrightarrow$ Νικολαείδιο Γυμνάσιο- Γυμνάσιο Αραδίππου

$(18,7) \longrightarrow$ Γυμνάσιο Ακακίου- Γυμνάσιο Αποστόλου Παύλου

Άρα από τα ζευγάρια $(2,7), (2,14)$ το ζευγάρι $(2,7)$ αποκλείεται και θα έχουμε υποχρεωτικά αγώνα μεταξύ

$(2,14) \longrightarrow$ Γυμνάσιο Αγίου Δομετίου- Γυμνάσιο Γεροσκήπου

Από τα ζευγάρια $(11,5), (11,14)$ το ζευγάρι $(11,14)$ αποκλείεται και θα έχουμε υποχρεωτικά αγώνα μεταξύ

$(11,5) \longrightarrow$ Γυμνάσιο Βεργίνας- Γυμνάσιο Κοκκινοτριμιθιάς

Από τα ζευγάρια $(4,5), (4,12)$ το ζευγάρι $(4,5)$ αποκλείεται και θα έχουμε υποχρεωτικά αγώνα μεταξύ

$(4,12) \longrightarrow$ Γυμνάσιο Παραλιμνίου- Γυμνάσιο Αγρού

Από τα ζευγάρια $(13,3), (13,12)$ το ζευγάρι $(13,12)$ αποκλείεται και θα έχουμε υποχρεωτικά αγώνα μεταξύ

$(13,3) \longrightarrow$ Γυμνάσιο Μακεδονίτισσας- Γυμνάσιο Ακροπόλεως

Από τα ζευγάρια $(1,3), (1,8), (1,15)$ τα ζευγάρια $(1,3), (1,8)$ αποκλείονται και θα έχουμε υποχρεωτικά αγώνες μεταξύ των ομάδων

$(1,15) \longrightarrow$ Περιφερειακό Γυμνάσιο Λευκάρων- Λανίτειο Γυμνάσιο και τέλος ,από τα ζευγάρια $(10,6), (10,15)$ το ζευγάρι $(10,15)$ αποκλείεται και θα έχουμε υποχρεωτικά αγώνα μεταξύ

$(10,6) \longrightarrow$ Γυμνάσιο Πόλεως Χρυσοχούς- Γυμνάσιο Αγίου Ιωάννη

Επομένως το πρόγραμμα της $1^{ης}$ φάσης των συναντήσεων του τουρνουά που δημιουργείται με αυτό τον τρόπο είναι:

Γυμνάσιο Δροσιάς- Γυμνάσιο Αγίου Αθανασίου
Νικολαείδιο Γυμνάσιο- Γυμνάσιο Αραδίππου
Γυμνάσιο Ακακίου- Γυμνάσιο Αποστόλου Παύλου
Γυμνάσιο Αγίου Δομετίου- Γυμνάσιο Γεροσκήπου
Γυμνάσιο Βεργίνας- Γυμνάσιο Κοκκινοτριμιθιάς
Γυμνάσιο Παραλιμνίου- Γυμνάσιο Αγρού
Γυμνάσιο Μακεδονίτισσας- Γυμνάσιο Ακροπόλεως
Περιφερειακό Γυμνάσιο Λευκάρων- Λανίτειο Γυμνάσιο
Γυμνάσιο Πόλεως Χρυσοχούς- Γυμνάσιο Αγίου Ιωάννη

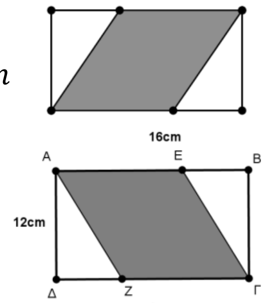
ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΚΥΤΑΛΟΔΡΟΜΙΑ 2015
ΓΙΑ ΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ
Τετάρτη 28 Ιανουαρίου 2015 – ΛΕΥΚΩΣΙΑ
Τάξη: Β΄ Γυμνασίου

<u>ΠΡΟΒΛΗΜΑ</u>

Το δάπεδο μιας μικρής εκκλησίας είναι σχήματος τετραγώνου πλευράς $9{,}6m$ και είναι στρωμένο με ορθογώνια πλακάκια. Το κάθε πλακάκι έχει μήκος $16cm$ και πλάτος $12cm$ και έχει την μορφή που φαίνεται στο ***Σχήμα 1***, όπου το τετράπλευρο $ΑΕΓΖ$ είναι ρόμβος χρώματος μαύρου και το υπόλοιπο μέρος του πλακιδίου είναι άσπρου χρώματος.

Η πλακόστρωση του δαπέδου της εκκλησίας έγινε έτσι ώστε να ακολουθείται ένα μοτίβο, μέρος του οποίου φαίνεται στο ***Σχήμα 2.***



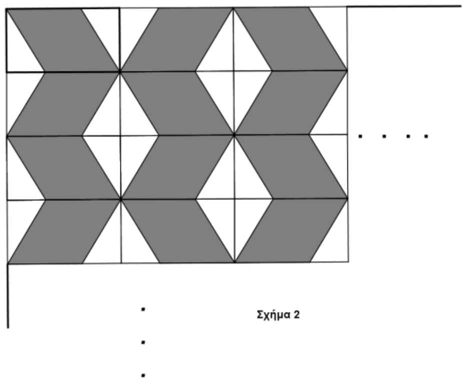
Σχήμα 1.

(α) Να υπολογίσετε την διαγώνιο $ΕΖ$ του ρόμβου $ΑΕΓΖ$ στο ***Σχήμα 1.***

(β) Να υπολογίσετε το ποσοστό του εμβαδού του δαπέδου της εκκλησίας που είναι μαύρου χρώματος.

(γ) Να υπολογίσετε το πλήθος των ορθογωνίων πλακιδίων με τα οποία είναι καλυμμένο το δάπεδο της εκκλησίας.

(δ) Να βρείτε το πλήθος των ρόμβων χρώματος άσπρου που σχηματίζονται στο δάπεδο της εκκλησίας με αυτό το μοτίβο πλακόστρωσης.

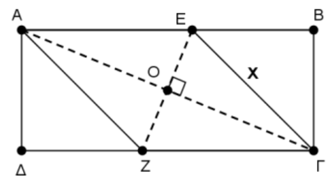

Σχήμα 2

<u>ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ</u>

(α) Έστω $\boldsymbol{x}$ η πλευρά του ρόμβου. Τότε έχουμε

$$BE = 16 - x$$

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $ΔΒΕΓ$, παίρνουμε



$$(16 - x)^2 + 12^2 = x^2 \Leftrightarrow 256 - 32x + x^2 + 144 = x^2 \Leftrightarrow$$
$$32x = 400 \Leftrightarrow x = \frac{400}{32} \Leftrightarrow x = \frac{25}{2}$$

Όμως από το ορθογώνιο τρίγωνο $ΔΑΒΓ$ έχουμε

$$ΑΓ^2 = 12^2 + 16^2 = 400 \Leftrightarrow ΑΓ = 20$$

Επομένως $ΓΟ = 10$. Τέλος από το ορθογώνιο τρίγωνο $ΔΕΟΓ$ έχουμε

$$ΕΟ^2 = x^2 - ΓΟ^2 = \left(\frac{25}{2}\right)^2 - 10^2 = \frac{225}{4} \Longrightarrow ΕΟ = \frac{15}{2}$$

Άρα $ΕΖ = 15cm$.

(β) Επειδή οι διαστάσεις του δαπέδου είναι 960×960 και $960 \div 16 = 60$, $960 \div 12 = 80$ το δάπεδο της εκκλησίας θα καλύπτεται πλήρως από ακέραιο αριθμό πλακιδίων.

Επομένως το ποσοστό του εμβαδού του δαπέδου της εκκλησίας που είναι μαύρου χρώματος θα είναι όσο το ποσοστό του εμβαδού μαύρου χρώματος που έχει ένα πλακίδιο. Άρα

$$E_{ρόμβου} = \frac{20 \cdot 15}{2} = 150cm^2$$

και

$$E_{ορθογωνίου} = 16 \cdot 12 = 192cm^2$$

Άρα το ποσοστό του εμβαδού του δαπέδου της εκκλησίας που είναι μαύρου χρώματος θα είναι

$$\frac{150}{192} \cdot 100 = 78{,}125\%$$

(γ) Το εμβαδόν του δαπέδου της εκκλησίας είναι

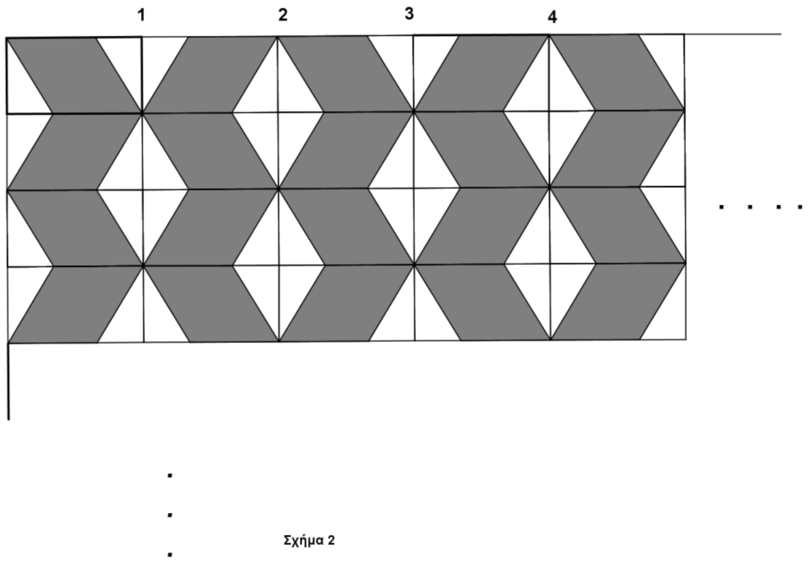
$$E_{τετραγώνου} = 960 \cdot 960 = 921600cm^2$$

Άρα το πλήθος των ορθογωνίων πλακιδίων με τα οποία είναι καλυμμένο το δάπεδο της εκκλησίας είναι

$$921600 \div 192 = 4800\ πλακίδια.$$

η διαφορετικά $\boldsymbol{60 \times 80 = 4800}$**.**

(δ)



Σχήμα 2

Έχουμε $960 \div 16 = 60$ κατακόρυφες στήλες ορθογωνίων πλακιδίων στο δάπεδο της εκκλησίας. Ανά δύο δημιουργούν ρόμβους άσπρου χρώματος στο δάπεδο της εκκλησίας. Άρα θα έχουμε 59 κατακόρυφες στήλες ρόμβων αριθμημένες όπως στο σχήμα $1,2,3,4,\ldots,59$.

Επίσης οι $960 \div 12 = 80$ οριζόντιες σειρές πλακιδίων ανά δύο δημιουργούν τους ίδιους ρόμβους άσπρου χρώματος στο δάπεδο της εκκλησίας.

Επομένως οι κατακόρυφες στήλες ρόμβων με περιττό αριθμό αρίθμησης από το σύνολο $\{1,2,3,4,\ldots,59\}$ θα περιέχουν 39 άσπρους ρόμβους, δηλαδή σύνολο $30 \cdot 39 = 1170$ και οι κατακόρυφες στήλες ρόμβων με άρτιο αριθμό αρίθμησης από το σύνολο $\{1,2,3,4,\ldots,59\}$ θα περιέχουν 40 άσπρους ρόμβους, δηλαδή σύνολο $29 \cdot 40 = 1160$.

Άρα το πλήθος των ρόμβων χρώματος άσπρου που σχηματίζονται στο δάπεδο της εκκλησίας με αυτό το μοτίβο πλακόστρωσης θα είναι

$$1170 + 1160 = 2330$$

ή διαφορετικά

$$\frac{80}{2} \times \left(\frac{60}{2} - 1\right) + \frac{60}{2} \times \left(\frac{80}{2} - 1\right) = 40 \cdot 29 + 30 \cdot 39 = 2330.$$

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΚΥΤΑΛΟΔΡΟΜΙΑ 2015
ΓΙΑ ΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ
Τετάρτη 28 Ιανουαρίου 2015 – ΛΕΥΚΩΣΙΑ
Τάξη: Γ΄ Γυμνασίου

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

(α) Να βρείτε πόσοι ακέραιοι αριθμοί μεταξύ του 1 και του 10000 έχουν **και τις δύο** παρακάτω ιδιότητες:

- είναι πολλαπλάσια του 7 και
- αν διαιρεθούν με 3 αφήνουν υπόλοιπο 1.

(β) Να βρείτε πόσοι ακέραιοι αριθμοί μεταξύ του 1 και του 10000 έχουν **και τις δύο** παρακάτω ιδιότητες:

- είναι πολλαπλάσια του 7 και
- αν διαιρεθούν με 3 **ή** το 2 αφήνουν υπόλοιπο 1.

Σημείωση: το διαζευκτικό «**ή**» σημαίνει είτε με τον ένα αριθμό είτε με τον άλλο είτε και με του δύο.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ

(α) Αφού οι ζητούμενοι αριθμοί είναι θετικοί ακέραιοι περιοριζόμαστε στο σύνολο των φυσικών αριθμών ℕ. Κάθε πολλαπλάσιο του 7 είναι της μορφής

$$x = 7m, \quad m \in \mathbb{N}$$

Κάθε ακέραιος που διαιρείται με το 3 και αφήνει υπόλοιπο 1 είναι της μορφής

$$x = 3n + 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

Αφαιρώντας τις προηγούμενες σχέσεις θα έχουμε

$$7m - 3n = 1$$

που έχει ακέραιες λύσεις για $n = 2,9,16, \ldots$ δηλαδή είναι της μορφής $n = 7\alpha + 2$, $\alpha \in \mathbb{N}$. Άρα

$$3n + 1 = 7m \Rightarrow 3(7\alpha + 2) + 1 = 7m \Rightarrow m = 3\alpha + 1, \quad \alpha \in \mathbb{N}$$

Αλλά

$$1 < x = 7m < 10000 \Leftrightarrow 1 < 21\alpha + 7 < 10000 \Leftrightarrow -6 < 21\alpha < 9993 \Leftrightarrow -\frac{6}{21} < \alpha < \frac{9993}{21}$$

$$-\frac{2}{7} < \alpha < \frac{3331}{7} \Rightarrow 0 \leq \alpha \leq 475$$

Άρα αν ονομάσουμε A το σύνολο των αριθμών που ικανοποιούν τις ιδιότητες του προβλήματος τότε θα έχουμε

$$\nu(A) = 476$$

(β) Κάθε πολλαπλάσιο του 7 είναι της μορφής

$$x = 7\kappa, \quad \kappa \in \mathbb{N}$$

Κάθε ακέραιος που διαιρείται με το 2 και αφήνει υπόλοιπο 1 είναι της μορφής

$$x = 2\lambda + 1, \quad \lambda \in \mathbb{N}$$

Αφαιρώντας τις προηγούμενες σχέσεις θα έχουμε

$$7\kappa - 2\lambda = 1$$

που έχει ακέραιες λύσεις για $\lambda = 3,10,17, \ldots$ δηλαδή είναι της μορφής $\lambda = 7\mu + 3$, $\mu \in \mathbb{N}$. Άρα

$$2\lambda + 1 = 7\kappa \Rightarrow 2(7\mu + 3) + 1 = 7\kappa \Rightarrow \kappa = 2\mu + 1, \quad \mu \in \mathbb{N}$$

Αλλά

$$1 < x = 7\kappa < 10000 \Leftrightarrow 1 < 14\mu + 7 < 10000 \Leftrightarrow -6 < 14\mu < 9993 \Leftrightarrow -\frac{6}{14} < \mu < \frac{9993}{14}$$

$$-\frac{3}{7} < \mu < \frac{9993}{14} \Rightarrow 0 \leq \mu \leq 713$$

Άρα αν ονομάσουμε B το σύνολο των αριθμών που ικανοποιούν τις ιδιότητες του προβλήματος τότε θα έχουμε

$$\nu(B) = 714$$

Όμοια βρίσκουμε το πλήθος των αριθμών μεταξύ του 1 και του 10000 που πολλαπλάσια του 7 και όταν διαιρούνται με το 3 και το 2 δηλαδή με το 6 αφήνουν υπόλοιπο 1. Έχουμε

Κάθε πολλαπλάσιο του 7 είναι της μορφής

$$x = 7\pi, \quad \pi \in \mathbb{N}$$

Κάθε ακέραιος που διαιρείται με το 6 και αφήνει υπόλοιπο 1 είναι της μορφής

$$x = 6\rho + 1, \qquad \rho \in \mathbb{N}$$

Αφαιρώντας τις προηγούμενες σχέσεις θα έχουμε

$$7\pi - 6\rho = 1$$

που έχει ακέραιες λύσεις για $\rho = 1,8,15, \ldots$ δηλαδή είναι της μορφής $\rho = 7\tau + 1,\ \ \tau \in \mathbb{N}$. Άρα

$$6\rho + 1 = 7\pi \Rightarrow 6(7\tau + 1) + 1 = 7\pi \Rightarrow \pi = 6\tau + 1, \quad \tau \in \mathbb{N}$$

Αλλά

$$1 < x = 7\pi < 10000 \Leftrightarrow 1 < 42\tau + 7 < 10000 \Leftrightarrow -6 < 42\tau < 9993 \Leftrightarrow -\frac{6}{42} < \tau < \frac{9993}{42}$$

$$-\frac{3}{21} < \tau < \frac{9993}{42} \Rightarrow 0 \leq \tau \leq 237$$

Επομένως

$$\nu(A \cap B) = 238$$

Αν ονομάσουμε Γ το σύνολο των αριθμών που ικανοποιούν τις συνθήκες του (β) είναι

$$\nu(\Gamma) = \nu(A) + \nu(B) - \nu(A \cap B) = 476 + 714 - 238 = 952.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Δίνονται οι αριθμοί

$$2^{999},\ \ 3^{888},\ \ 4^{777},\ \ 5^{666},\ \ 6^{555},\ \ 7^{444},\ \ 8^{333}\ ,\ \ 9^{222}$$

Να τοποθετήσετε τους δεδομένους αριθμούς σε σειρά αρχίζοντας από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο, γράφοντας μεταξύ τους το κατάλληλο από τα σύμβολα $<$ ή $=$.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ

Οι δεδομένοι αριθμοί γράφονται

$$2^{999}=(2^9)^{111},\ \ 3^{888}=(3^8)^{111},\ \ 4^{777}=(4^7)^{111},$$
$$5^{666}=(5^6)^{111},\ \ 6^{555}=(6^5)^{111},\ \ 7^{444}=(7^4)^{111},\ \ 8^{333}=(8^3)^{111}\ ,$$
$$9^{222}=(9^2)^{111}$$

Αφού για θετικούς ακεραίους ισχύει

$$a^{\nu}<\beta^{\nu}\Leftrightarrow \alpha<\beta$$

αρκεί να βρούμε την σειρά των

$$2^9, 3^8, 4^7, 5^6, 6^5, 7^4, 8^3, 9^2$$

Όμως υπολογίζοντας τις δυνάμεις θα έχουμε

$$2^9=512,\qquad 3^8=6561,\qquad 4^7=16384,\qquad 5^6=15625,\qquad 6^5=7776,$$
$$7^4=2401,\qquad 8^3=512,\qquad 9^2=81$$

Επομένως, αφού

$$9^2<2^9=8^3<7^4<3^8<6^5<5^6<4^7$$

παίρνουμε

$$9^{222}<2^{999}=8^{333}<7^{444}<3^{888}<6^{555}<5^{666}<4^{777}$$

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΚΥΤΑΛΟΔΡΟΜΙΑ 2015
ΓΙΑ ΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ
Τετάρτη 28 Ιανουαρίου 2015 – ΛΕΥΚΩΣΙΑ
Τάξη: Β΄ Γυμνασίου

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

(α) Να βρείτε όλα τα ζευγάρια (μ,ν) ακεραίων αριθμών που ικανοποιούν την εξίσωση

$$\mu^2+\nu^2=25 \qquad (1)$$

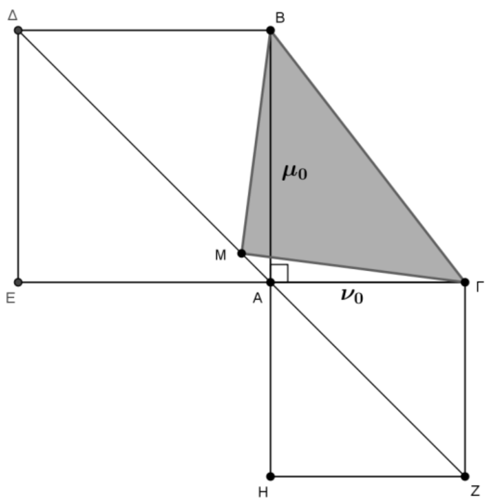
(β) Έστω ότι (μ_0,ν_0) είναι ένα ζευγάρι θετικών ακεραίων λύσεων της (1). Με μήκη κάθετων πλευρών τα μ_0,ν_0 σχεδιάζουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta AB\Gamma$ και εκτός αυτού τα τετράγωνα $AB\Delta E$ και $A\Gamma ZH$ όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Φέρουμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΔA και AZ. Να αποδείξετε ότι :

i. Τα σημεία Δ, A, Z βρίσκονται πάνω σε ευθεία.

ii. Αν M το μέσο του ΔZ τότε ισχύει

$$MB=M\Gamma=\frac{B\Gamma\sqrt{2}}{2}$$

(γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $\Delta BM\Gamma$.



ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ

(α) Από την εξίσωση (1) παίρνουμε

$$\mu^2+\nu^2=25 \Leftrightarrow \mu^2=25-\nu^2\geq 0$$

Άρα,

$$\nu^2\leq 25 \Leftrightarrow |\nu|\leq 5 \Leftrightarrow -5\leq\nu\leq 5$$

επομένως , $\nu\in\{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$

- $Αν\ \nu=-5$ ή 5, $\quad \mu^2=0$ ή $\mu=0$ *τότε τα ζευγάρια* (μ,ν) *είναι το* $(0,-5),(0,5)$.
- $Αν\ \nu=-4$ ή 4, $\quad \mu^2=9$ ή $\mu=\pm 3$ *τότε τα ζευγάρια* (μ,ν) *είναι τα* $(3,-4),(-3,-4),(3,4),(-3,4)$.
- $Αν\ \nu=-3$ ή 3, $\quad \mu^2=16$ ή $\mu=\pm 4$ *τότε τα ζευγάρια* (μ,ν) *είναι τα* $(4,-3),(-4,-3),(4,3),(-4,3)$.
- $Αν\ \nu=-2$ ή 2, $\mu^2=21$ *αδύνατη στο σύνολο των ακεραίων αριθμών* $\mathbb{Z}$.
- $Αν\ \nu=-1$ ή 1, $\mu^2=24$ *αδύνατη στο σύνολο των ακεραίων αριθμών* $\mathbb{Z}$.
- $Αν\ \nu=0$, $\quad \mu^2=25$ ή $\mu=\pm 5$ *τότε τα ζευγάρια* (μ,ν) *είναι τα* $(5,0),(-5,0)$.

Άρα όλα τα ζευγάρια (μ,ν) ακεραίων αριθμών που ικανοποιούν την εξίσωση (1) είναι

$$(\mu,\nu)\in\left\{\begin{matrix}(0,-5),(0,5),(5,0),(-5,0),(3,-4),(-3,-4),(3,4),\\(-3,4),(4,-3),(-4,-3),(4,3),(-4,3)\end{matrix}\right\}$$

(β) (i) Τα ζευγάρια θετικών ακεραίων λύσεων της (1) είναι τα $(3,4)$ *και* $(4,3)$. Έστω $(\mu_0,\nu_0)=(4,3)$ τότε $\mu_0=4$ και $\nu_0=3$.

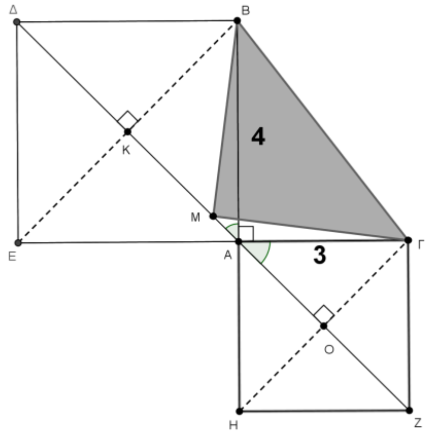
Επειδή

$$\angle\Delta AB+\angle BA\Gamma+\angle\Gamma AZ=45°+90°+45°=180°$$

τα σημεία Δ, A, Z βρίσκονται πάνω σε ευθεία.

(ii) Εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο Θεώρημα στα τρίγωνα $\Delta AB\Gamma, \Delta\Delta AB, \Delta\Gamma AZ$, και παίρνουμε

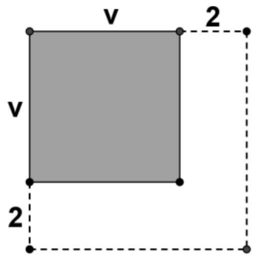
$$B\Gamma^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \Rightarrow B\Gamma = 5$$
$$\Delta A^2 = 2AB^2 = 2 \cdot 4^2 = 32 \Rightarrow \Delta A = 4\sqrt{2}$$
$$AZ^2 = 2 \cdot A\Gamma^2 = 18 \Longrightarrow AZ = 3\sqrt{2}$$



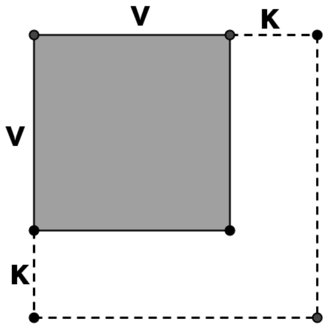
Άρα
$$\Delta M = MZ = \frac{4\sqrt{2} + 3\sqrt{2}}{2} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$
Επειδή οι διαγώνιοι του τετραγώνου διχοτομούνται, θα έχουμε
$$\Delta K = BK = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$
Από τα παραπάνω παίρνουμε
$$KM = \Delta M - \Delta K = \frac{7\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$
Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔBKM έχουμε
$$MB^2 = BK^2 + KM^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 8 + \frac{9}{2} = \frac{25}{2} \Rightarrow MB = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$
Επίσης,
$$MO = MZ - OZ \Rightarrow MO = \frac{7\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$
Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta MO\Gamma$ έχουμε
$$M\Gamma^2 = MO^2 + O\Gamma^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 8 + \frac{9}{2} = \frac{25}{2} \Rightarrow M\Gamma = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$
Άρα
$$MB = M\Gamma = \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{B\Gamma\sqrt{2}}{2}$$
(iii) Επειδή
$$MB^2 + M\Gamma^2 = 2 \cdot \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 25 = B\Gamma^2$$
συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο $\Delta MB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. και άρα το εμβαδόν του θα είναι
$$E_{\Delta MB\Gamma} = \frac{1}{2}\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}.$$

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΚΥΤΑΛΟΔΡΟΜΙΑ 2015
ΓΙΑ ΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ
Τετάρτη 28 Ιανουαρίου 2015 – ΛΕΥΚΩΣΙΑ
Τάξη: Γ΄ Γυμνασίου

ΠΡΟΒΛΗΜΑ



(α) Ο κ. Γιώργος είναι Μαθηματικός και έχει στην αποθήκη του ένα αριθμό από τετράγωνα πλακάκια που το κάθε ένα έχει μήκος πλευράς 1 dm. Αποφάσισε με τα πλακάκια αυτά να πλακοστρώσει ένα μέρος της αυλής του. Τοποθετώντας τα πλακάκια το ένα δίπλα στο άλλο σχημάτισε ένα μεγάλο τετράγωνο πλευράς ν αλλά παρατήρησε ότι του περίσσεψαν 92 πλακάκια. Στην συνέχεια αύξησε κατά 2 dm το μήκος της πλευράς του μεγάλου τετραγώνου και τότε διαπίστωσε ότι για να καλύψει το τετράγωνο πλευράς $\nu+2$ θα χρειάζονταν ακόμη 100 πλακάκια. Να βρείτε πόσα πλακάκια είχε ο κ. Γιώργος αρχικά στην αποθήκη του.



(β) Ο κ. Γιώργος, ως Μαθηματικός, σκέφτηκε ένα πιο γενικό πρόβλημα παίρνοντας αφορμή από την εμπειρία που είχε με την πλακόστρωση της αυλής του. Το πρόβλημα είναι το εξής: «Κάποιος προσπαθεί να κατασκευάσει ένα μεγάλο τετράγωνο πλευράς ν χρησιμοποιώντας μικρά τετράγωνα πλευράς 1 , τοποθετώντας τα το ένα δίπλα στο άλλο, και του περισσεύουν 92 μικρά τετράγωνα. Στην προσπάθειά του να κατασκευάσει ένα δεύτερο μεγάλο τετράγωνο, αυξάνει το μήκος της πλευράς του πρώτου τετραγώνου κατά κ μονάδες και διαπιστώνει ότι του χρειάζονται 100 μικρά τετράγωνα ακόμη.»
Να υπολογίσετε ποιο μπορεί να είναι το πλήθος των μικρών τετραγώνων πλευράς 1 που είναι δυνατόν να είχε αρχικά, δοθέντος ότι ν και κ είναι ακέραιοι.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ

(α) Από την εκφώνηση του προβλήματος θα έχουμε την εξίσωση

$$\nu^2+92=(\nu+2)^2-100 \Leftrightarrow \nu^2+92=\nu^2+4\nu+4-100 \Leftrightarrow \nu=47$$

Άρα το πλήθος από πλακάκια που είχε ο κ. Γιώργος στην αποθήκη του ήταν

$$47^2+92=2301.$$

(β) Όμοια, θα έχουμε την εξίσωση

$$\nu^2+92=(\nu+\kappa)^2-100 \Leftrightarrow \nu^2+92=\nu^2+2\nu\kappa+\kappa^2-100 \Leftrightarrow$$
$$\kappa^2+2\kappa\nu-192=0$$

Λύνοντας την τελευταία εξίσωση θα έχουμε

$$\kappa=\frac{-2\nu\pm\sqrt{4\nu^2+4\cdot 192}}{2}=-\nu\pm\sqrt{\nu^2+192}$$

Θα πρέπει ν^2+192 να είναι τέλειο τετράγωνο, δηλαδή

$$\nu^2+192=\mu^2 \Longrightarrow (\mu-\nu)(\nu+\mu)=192=2^6\cdot 3$$

Οι διαιρέτες του 192 είναι:

$$1,2,3,4,6,8,12,16,24,32,48,64,96,192$$

Ελέγχουμε τα δυνατά ζευγάρια των παραγόντων

$\mu - \nu$	$\nu + \mu$	μ	ν	Πλήθος μικρών τετραγώνων
1	192			
2	96	49	47	2301
3	64			
4	48	26	22	576
6	32	19	13	261
8	24	16	8	156
12	16	14	2	96